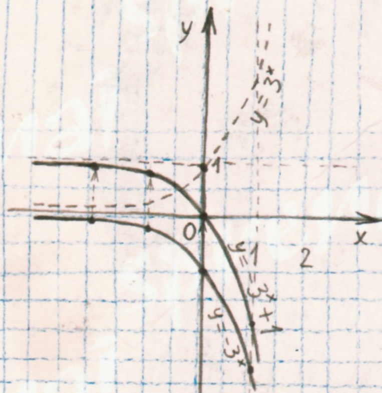
Eglė Danielienė, Aldona Janulevičienė, Daiva Noreikienė

# Matematikos kontroliniai darbai su sprendimais

## 11 KLASĖ

### 1 dalis



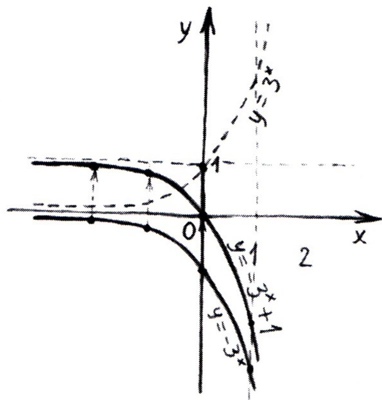

$$\sqrt[3]{15\frac{5}{8}}-\sqrt[4]{0{,}0081}-\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{16}}}=\sqrt[3]{\frac{125}{8}}-0{,}3-\frac{2}{\frac{1}{4}}=\frac{5}{2}-0{,}3-2\cdot4=$$

$$=2{,}5-0{,}3-8=-5{,}8.$$

Atsakymas. $-5{,}8$

Eglė Danielienė, Aldona Janulevičienė, Daiva Noreikienė

# Matematikos kontroliniai darbai su sprendimais




## 11 KLASĖ

### 1 dalis



TEV
VILNIUS 2008

UDK 51(076)
Da247

Darbo vadovas *Valdas Vanagas*

Redaktoriai: *Juozas Mačys*, *Žydrūnė Stundžienė*

Programinė įranga: *Rolandas Jakštys*

Kompiuterinė grafika: *Edita Tatarinavičiūtė*

Tekstą kompiuteriu rinko ir maketavo *Laimutė Ališauskienė* ir
*Nijolė Drazdauskienė*

Konsultantas *Elmundas Žalys*

Recenzavo Matematikos ir informatikos institutas

Leidyklos TEV interneto svetainė www.tev.lt



ISBN 9955-680-17-2

# PRATARMĖ

Ši kontrolinių darbų knygelė skirta 11, 12 klasių mokytojams, taip pat mokiniams, pasirinkusiems išplėstinį matematikos kursą bei norintiems geriau pasiruošti kontroliniams darbams ir brandos egzaminui.

Kontrolinių darbų užduotys sudarytos pagal vadovėlio „Matematika 11“ (Leidykla TEV, 2002 m.) pirmąją dalį.

Leidinyje yra 11 kontrolinių darbų, kuriuose sunkėjimo tvarka pateikiama po kelias užduotis. Paskutinė kiekvieno kontrolinio darbo užduotis skiriama geometrijos kurso kartojimui.

Kiekvieno kontrolinio darbo yra du variantai. Pirmasis variantas pateiktas su sprendimais, paaiškinimais ir atsakymais. Prie uždavinių sprendimų kai kur rasite stačiakampiuose įrėmintus svarbiausius teorinius faktus, susijusius su sprendžiamu uždaviniu. Analogiškas antrasis variantas skirtas pasitikrinti mokiniams, kaip jie suprato pirmojo varianto užduotis, — jo duoti tik atsakymai knygelės gale. Beje, knygelės gale pateikiami ir pirmojo varianto uždavinių atsakymai, todėl mokinys gali neskaityti sprendimų, o tik pasitikrinti atsakymo teisingumą.

Knygelė naudinga ir matematikos mokytojams organizuojant mokymo procesą, tikrinant mokinių žinias. Parinkdamas uždavinius pagal sudėtingumo laipsnį, mokytojas visą mokymo procesą gali individualizuoti.

Knygele galima naudotis einat kursą, kartojant išeitą medžiagą, ruošiantis kontroliniam darbui ar egzaminui.

Visi knygelėje pateikti uždaviniai atitinka standartų ir programų reikalavimus. Uždavinių sąlygas, sprendimus bei atsakymus patikrino leidyklos TEV specialistai.

Artimiausiu metu planuojame parengti ir išleisti analogiškas knygeles, atitinkančias vadovėlius „Matematika 11, II dalis“, „Matematika 12, I dalis“ bei „Matematika 12, II dalis“.

*Autorės*

# TURINYS

# Realiųjų skaičių aibė

**K1 (1.1–1.5)**

**1.** a) Dviženklio skaičiaus skaitmenų suma lygi 12. Iš šio skaičiaus atėmus 18 gaunamas skaičius, užrašytas tais pačiais skaitmenimis, bet atvirkščia tvarka. Raskite pradinį skaičių.

b) Triženklis skaičius baigiasi skaitmeniu 2. Jei šį skaitmenį perkeltume į skaičiaus pradžią, tai gautasis skaičius būtų 18 vienetų didesnis už pradinį skaičių. Koks pradinis skaičius?

c) Dviženklio skaičiaus vienetų skaitmuo 2 vienetais didesnis už dešimčių skaitmenį. Šio skaičiaus ir jo skaitmenų sumos sandauga lygi 144. Raskite tą dviženklį skaičių.

**2.** Apskaičiuokite.

a) $\frac{\frac{2}{3}\cdot 9{,}6+\frac{6}{7}:1\frac{3}{7}-7}{1\frac{2}{3}+\frac{4}{5}}$; b) $1,(3)+2,(23)$; c) $\frac{0{,}8(5)+0{,}1(6)}{0{,}17(1)}$.

**3.** Kuris iš dviejų skaičių didesnis:

a) $\sqrt{40}$ ar 6? b) $-\sqrt{6}$ ar $-2{,}4$? c) $\sqrt{14}$ ar $\sqrt{3}+\sqrt{11}$?

**4.** a) Paprastąją trupmeną $\frac{3}{7}$ išreikškite dešimtaine ir suapvalinkite tikslumu $\delta = 0{,}001$.

b) Iracionalųjį skaičių $\sqrt{15}$ suapvalinkite tikslumu $\delta = 0{,}0001$.

c) Paverskite centimetrais $\sqrt{24}$ m ir raskite apytikslę reikšmę 1 cm tikslumu.

**5.** Raskite $x$ reikšmes ir pažymėkite jas skaičių tiesėje.

a) $|x-2| = 3$;

b) $|x+2| > 1$;

c) $|3+2x| \leqslant 5$.

**6.** Panaikinkite iracionalumą vardiklyje.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$;

b) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$;

c) $\frac{2}{1+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

**7.** Apskaičiuokite reiškinio reikšmę.

a) $|\sqrt{7}-3| + |2-\sqrt{7}|$;

b) $\frac{(\sqrt{2}-1)^2-(\sqrt{2}+1)^2}{2}$;

c) $3\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{10}+5}+\frac{5}{\sqrt{10}-2}-\frac{7}{\sqrt{10}}\right)$.

**8.** Dviejų lygiagretainio kraštinių ir ilgesniosios aukštinės ilgiai sutinka kaip 5 : 6 : 4. Raskite lygiagretainio perimetrą, jei jo plotas lygus 180.

**1.** a) Dviženklio skaičiaus dešimčių skaitmuo dvigubai didesnis už vienetų skaitmenį. Sukeitę skaitmenis vietomis gausime skaičių, kuris 36 vienetais mažesnis už pradinį. Raskite pradinį skaičių.
b) Triženklis skaičius baigiasi skaitmeniu 3. Jei šį skaitmenį perkeltume į skaičiaus pradžią, tai gautasis skaičius būtų 9 vienetais didesnis už pradinį skaičių. Koks pradinis skaičius?
c) Dviženklio natūraliojo skaičiaus skaitmenų kvadratų suma lygi 52, o dešimčių ir vienetų skaitmenų skirtumas lygus 2. Raskite tą dviženklį skaičių.

**2.** Apskaičiuokite.
a) $\frac{5{,}6\cdot\frac{3}{4}+1\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{15}}{2\frac{4}{5}-\frac{7}{10}}$; b) $1{,}(71)-0{,}(2)$; c) $\frac{3{,}5(7)+1{,}0(2)}{4{,}(1)}$.

**3.** Kuris iš dviejų skaičių didesnis:
a) $\sqrt{50}$ ar 7? b) $-\sqrt{11}$ ar $-3{,}32$? c) $\sqrt{17}$ ar $\sqrt{12}+\sqrt{5}$?

**4.** a) Paprastąją trupmeną $\frac{5}{11}$ išreikškite dešimtaine ir suapvalinkite tikslumu $\delta = 0{,}001$.
b) Iracionalųjį skaičių $\sqrt{11}$ suapvalinkite tikslumu $\delta = 0{,}0001$.
c) Paverskite centimetrais $\sqrt{26}$ m ir raskite apytikslę reikšmę 1 cm tikslumu.

**5.** Raskite $x$ reikšmes ir pažymėkite jas skaičių tiesėje.
a) $|x+2| = 5$;
b) $|x-4| > 5$;
c) $|2x-1| \leqslant 1$.

**6.** Panaikinkite iracionalumą vardiklyje.
a) $\frac{1}{3-\sqrt{3}}$;
b) $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$;
c) $\frac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{5}+2}$.

**7.** Apskaičiuokite reiškinio reikšmę.
a) $|1-\sqrt{8}|+|3-\sqrt{8}|$;
b) $\frac{(2+\sqrt{3})^2-(2-\sqrt{3})^2}{8}$;
c) $\left(\frac{2}{\sqrt{6}+2}+\frac{5}{\sqrt{6}-4}-\frac{3}{\sqrt{6}}\right)\cdot\sqrt{6}$.

**8.** Dviejų lygiagretainio kraštinių ir trumpesniosios įstrižainės ilgiai sutinka kaip 7 : 9 : 8. Raskite lygiagretainio perimetrą, jei jo ilgesniosios įstrižainės ilgis yra 28.

# Realiųjų skaičių aibė



**1a.** Dviženklio skaičiaus skaitmenų suma lygi 12. Iš šio skaičiaus atėmus 18 gaunamas skaičius, užrašytas tais pačiais skaitmenimis, bet atvirkščia tvarka. Raskite pradinį skaičių.

*Sprendimas*. Pažymėkime ieškomą dviženklį skaičių $\overline{xy}$; čia $y$ — vienetų skaitmuo, $x$ — dešimčių skaitmuo. (Vienetų skaitmuo $y$ gali būti 0, 1, 2, ..., 9, o dešimčių skaitmuo negali būti 0, t. y. $x = 1, 2, 3, ..., 9$.)
Užrašykime dviženklį skaičių $\overline{xy}$ skyrių suma:

$$\overline{xy} = 10x + y.$$

Tais pačiais skaitmenimis, bet atvirkščia tvarka užrašytas skaičius:

$$\overline{yx} = 10y + x.$$

Pagal uždavinio sąlygą sudarome lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x + y = 12, & (1) \\ \overline{xy} - 18 = \overline{yx}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 12, \\ 10x + y - 18 = 10y + x; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 12, \\ 10x - x + y - 10y = 18; \end{cases}$$

$$+\begin{cases} x + y = 12, \\ x - y = 2; \end{cases}$$
$$2x = 14,$$
$$x = 7.$$

Gautą $x$ reikšmę įstatę į (1) lygtį, apskaičiuojame $y$ reikšmę:

$$7 + y = 12, \quad y = 12 - 7, \quad y = 5.$$

Gavome, kad ieškomas dviženklis skaičius yra 75.
*Tikriname*: $7 + 5 = 12$ ir $75 - 18 = 57$.

*Atsakymas*. 75.

**1b.** Triženklis skaičius baigiasi skaitmeniu 2. Jei šį skaitmenį perkeltume į skaičiaus pradžią, tai gautasis skaičius būtų 18 vienetų didesnis už pradinį skaičių. Koks pradinis skaičius?

***I būdas.*** Pažymėkime ieškomą triženklį skaičių $\overline{xy2}$. Užrašome tą skaičių skyrių suma:

$$\overline{xy2} = 100x + 10y + 2.$$

Skyrių suma užrašome skaičių $\overline{2xy}$:

$$\overline{2xy} = 200 + 10x + y.$$

Pagal sąlygą:

$$\overline{xy2} = \overline{2xy} - 18,$$
$$100x + 10y + 2 = 200 + 10x + y - 18,$$
$$90x + 9y = 180,$$
$$10x + y = 20.$$

Pastebėkime, kad ši lygybė yra teisinga tik su reikšmėmis

$$x = 2 \quad \text{ir} \quad y = 0.$$

Tas $x$ ir $y$ reikšmes galima rasti ir taip:
Kadangi

$$\overline{2xy} = 200 + 10x + y, \quad \text{o} \quad 10x + y = 20,$$

tai

$$\overline{2xy} = 200 + 20 = 220.$$

Taigi ieškomas triženklis skaičius yra 202.
*Tikriname*: $202 = 220 - 18$, lygybė teisinga.
***II būdas.*** Užrašykime sąlygą taip:

$$\begin{array}{r} xy2 \\ +\ \ 18 \\ \hline 2xy \end{array}$$

Kadangi $2 + 8 = y$, tai skaitmuo $y = 0$. Iš sumos

$$\begin{array}{r} x02 \\ +\ \ 18 \\ \hline 2x0 \end{array}$$

nustatome, kad $x = 2$.

*Atsakymas*. 202.

**1c.** Dviženklio skaičiaus vienetų skaitmuo 2 vienetais didesnis už dešimčių skaitmenį. Šio skaičiaus ir jo skaitmenų sumos sandauga lygi 144. Raskite tą dviženklį skaičių.

*Sprendimas*. Pažymėkime ieškomą dviženklį skaičių $\overline{xy}$.
Pagal uždavinio sąlygą:

$$\begin{cases} y = x + 2, \\ \overline{xy} \cdot (x + y) = 144; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 2, & (1) \\ (10x + y) \cdot (x + y) = 144; & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) \to (2)\text{:}\ & (10x + x + 2) \cdot (x + x + 2) = 144, \\ & (11x + 2) \cdot (2x + 2) = 144, \\ & (11x + 2) \cdot (x + 1) \cdot 2 = 144, \\ & (11x + 2)(x + 1) = 72, \\ & 11x^2 + 13x - 70 = 0, \\ & D = 13^2 - 4 \cdot 11 \cdot (-70) = 3249 = 57^2, \\ & x_1 = \frac{-13 + 57}{2 \cdot 11} = \frac{44}{22} = 2, \\ & x_2 = \frac{-13 - 57}{22} = -\frac{70}{22}. \end{aligned}$$

Reikšmė $x = -\frac{70}{22}$ netinka, nes $x$ — skaitmuo.
Imame $x = 2$. Iš (1) randame $y$:

$$y = 2 + 2 = 4.$$

Vadinasi,

$$\overline{xy} = 24.$$

*Tikriname*: $2 + 2 = 4$, $24 \cdot (2 + 4) = 144$.

*Atsakymas*. 24.

**2a.** $\frac{\frac{2}{3}\cdot 9{,}6+\frac{6}{7}:1\frac{3}{7}-7}{1\frac{2}{3}+\frac{4}{5}}$.

Apskaičiuojame skaitiklio reikšmę:

1) $\frac{2}{3}\cdot 9{,}6=\frac{2\cdot 96}{3\cdot 10}=\frac{32}{5}$; 2) $\frac{6}{7}:1\frac{3}{7}=\frac{6}{7}:\frac{10}{7}=\frac{6\cdot 7}{7\cdot 10}=\frac{3}{5}$;

3) $\frac{32}{5}+\frac{3}{5}=\frac{32+3}{5}=\frac{35}{5}=7$; 4) $7-7=0$;

5) Vardiklis nelygus 0, jo ir apskaičiuoti nereikia: $0:\left(1\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right)=0$.

*Atsakymas.* 0.

**2b.** $1,(3)+2,(23)$.

Užrašykime begalines dešimtaines trupmenas $1,(3)$ ir $2,(23)$ paprastosiomis.

***I būdas.***

$$\begin{aligned} x &= 1,(3)\mid\cdot 10, \\ 10x &= 13,(3), \\ 10x-x &= 13,(3)-1,(3), \\ 9x &= 12, \\ x &= \frac{12}{9}=1\frac{3}{9}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 2,(23)\mid\cdot 100, \\ 100y &= 223,(23), \\ 100y-y &= 223,(23)-2,(23), \\ 99y &= 221, \\ y &= \frac{221}{99}=2\frac{23}{99}. \end{aligned}$$

***II būdas.*** $1,(3)=1+0,(3)$.

| |
|---|
| Kai dešimtainio skaičiaus trupmeninės dalies *visi* skaitmenys yra periode, tai periodinę dalį keisdami paprastąja trupmena galime remtis tokiu algoritmu:<br>• skaitiklyje rašome periodinę dalį,<br>• vardiklyje rašome tiek devynetų, kiek skaitmenų yra skaitiklyje. |

$$1,(3)=1+\frac{3}{9}=1\frac{3}{9};\quad 2,(23)=2+\frac{23}{99}=2\frac{23}{99}.$$

$$1,(3)+2,(23)=1\frac{3}{9}+2\frac{23}{99}=3+\frac{33+23}{99}=3\frac{56}{99}.$$

***III būdas.*** Atlikti veiksmus su dešimtainėmis periodinėmis trupmenomis dažnai nėra patogu. Todėl jas pravartu pasiversti paprastosiomis trupmenomis (žr. I ir II būdus). Tačiau šiuo atveju galima skaičiuoti ir taip:

$$\begin{array}{r} 1{,}3333\ldots \\ +\;2{,}232323\ldots \\ \hline 3{,}5656\ldots \end{array}$$

$1,(3)+2,(23)=3,(56)$.

*Atsakymas.* $3\frac{56}{99}$.

**2c.** $\frac{0,8(5)+0,1(6)}{0,17(1)}$.

Užrašykime begalines dešimtaines trupmenas $0,8(5)$; $0,1(6)$ ir $0,17(1)$ paprastosiomis:

$$\begin{aligned} x &= 0,8(5) \mid \cdot 10, \\ 10x &= 8,(5) \mid \cdot 10, \\ 100x &= 85,(5), \\ 100x - 10x &= 85,(5) - 8,(5), \\ 90x &= 77, \\ x &= \frac{77}{90}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 0,1(6) \mid \cdot 10, \\ 10y &= 1,(6) \mid \cdot 10, \\ 100y &= 16,(6), \\ 100y - 10y &= 16,(6) - 1,(6), \\ 90y &= 15, \\ y &= \frac{15}{90}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= 0,17(1) \mid \cdot 100, \\ 100z &= 17,(1) \mid \cdot 10, \\ 1000z &= 171,(1), \\ 1000z - 100z &= 171,(1) - 17,(1), \\ 900z &= 154, \\ z &= \frac{154}{900}. \end{aligned}$$

Arba:

$0,8(5) = 0,8 + 0,0(5) = \frac{8}{10} + \frac{5}{90} = \frac{77}{90}$;

$0,1(6) = 0,1 + 0,0(6) = \frac{1}{10} + \frac{6}{90} = \frac{15}{90}$;

$0,17(1) = 0,17 + 0,00(1) = \frac{17}{100} + \frac{1}{900} = \frac{154}{900}$.

| |
|---|
| Dešimtainės trupmenos periodinę dalį atitinkančios paprastosios trupmenos vardiklį gauname parašę tiek devynetų, kiek skaitmenų yra periode, ir prirašę tiek nulių, kiek skaitmenų yra po kablelio iki periodinės dalies. |

$$\frac{0,8(5)+0,1(6)}{0,17(1)} = \frac{\frac{77}{90}+\frac{15}{90}}{\frac{154}{900}} = \frac{\frac{77+15}{90}}{\frac{154}{900}} = \frac{\frac{92}{90}}{\frac{154}{900}} = \frac{\frac{92}{90}\cdot 900}{\frac{154}{900}\cdot 900} = \frac{920}{154} = 5\frac{75}{77}.$$

$$\left(= \frac{92}{90} : \frac{154}{900} = \frac{92\cdot 900}{90\cdot 154} = 5\frac{75}{77}.\right)$$

*Atsakymas.* $5\frac{75}{77}$.

**3a.** Kuris skaičius didesnis: $\sqrt{40}$ ar 6?
***I būdas.*** Skaičių 6 keičiame jam lygia kvadratine šaknimi:

$6 = \sqrt{6^2} = \sqrt{36}$ (įkeldami skaičių po šaknies ženklu, keliam jį kvadratu).

Didesnis tas skaičius, kurio pošaknis didesnis. Vadinasi, $\sqrt{40} > \sqrt{36}$.
***II būdas.*** Keliame abu skaičius $\sqrt{40}$ ir 6 kvadratu (naikiname šaknį):

$$(\sqrt{40})^2 \quad \text{ir} \quad 6^2,$$
$$40 \quad \text{ir} \quad 36.$$

Kadangi $40 > 36$, tai $\sqrt{40} > 6$.
***III būdas.*** Skaičiuokliu randame: $\sqrt{40} \approx 6{,}3$, $\quad 6{,}3 > 6$.

*Atsakymas.* $\sqrt{40}$.

**3b.** Kuris skaičius didesnis: $-\sqrt{6}$ ar $-2{,}4$?
Kadangi

$$-2{,}4 = -\sqrt{2{,}4^2} = -\sqrt{5{,}76},$$

tai mums reikia nustatyti, kas daugiau: $-\sqrt{6}$ ar $-\sqrt{5{,}76}$.

| Iš dviejų *neigiamų* skaičių didesnis yra tas, kurio modulis mažesnis. |
|---|

Kadangi

$$\sqrt{6} > \sqrt{5{,}76}, \quad \text{tai} \quad -\sqrt{6} < -\sqrt{5{,}76}.$$

*Atsakymas.* $-2{,}4$.

**3c.** Kuris skaičius didesnis: $\sqrt{14}$ ar $\sqrt{3} + \sqrt{11}$?
***I būdas.*** Kelkime kvadratu — naikinkime šaknis:

$$(\sqrt{14})^2 \quad \text{ir} \quad (\sqrt{3} + \sqrt{11})^2;$$
$$14 \quad \text{ir} \quad 3 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{11} + 11;$$
$$14 \quad \text{ir} \quad 14 + 2\sqrt{33}.$$

Kadangi

$$14 < 14 + 2\sqrt{33}, \quad \text{tai} \quad \sqrt{14} < \sqrt{3} + \sqrt{11}.$$

***II būdas.*** Galima skaičiuoti ir skaičiuokliu:
$\sqrt{14} \approx 3{,}7$, $\quad \sqrt{3} \approx 1{,}7$, $\quad \sqrt{11} \approx 3{,}3$, $\quad 1{,}7 + 3{,}3 = 5$, $\quad 3{,}7 < 5$.

*Atsakymas.* $\sqrt{3} + \sqrt{11}$.

**4.**

> Jei po skyriaus skaitmens, iki kurio apvaliname, eina skaitmuo, didesnis už 5 arba lygus 5, tai apvalindami to skyriaus skaitmenį padidiname vienetu, o mažesniųjų skyrių skaitmenis pakeičiame nuliais.
> Jei po skyriaus skaitmens, iki kurio apvaliname, eina skaitmuo, mažesnis už 5, tai apvalindami to skyriaus skaitmens nekeičiame, o mažesniųjų skyrių skaitmenis pakeičiame nuliais.

**4a.** Paprastąją trupmeną versdami dešimtaine, skaitiklį dalijame iš vardiklio. Tai greičiausiai atlikti skaičiuokliu.
$\frac{3}{7} = 0{,}42\underline{8}57... \approx 0{,}429.$ *Atsakymas.* 0,429.

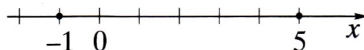
**4b.** Šaknies dešimtainę reikšmę randame skaičiuokliu.
$\sqrt{15} = 3{,}872\underline{9}8... \approx 3{,}8730.$ *Atsakymas.* 0,8730.

**4c.** $\sqrt{24}\,\text{m} = (\sqrt{24}\cdot 100)\,\text{cm} = \sqrt{240\,000}\,\text{cm} = 48\underline{9}{,}89...\,\text{cm} \approx 490\,\text{cm}.$
*Atsakymas.* 490 cm.

**5a.** $|x-2| = 3.$
Lygybė yra teisinga, kai reiškinys $x-2$ (po modulio ženklu esantis reiškinys) lygus arba $+3$, arba $-3$:

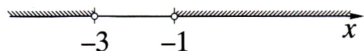
| | | |
|---|---|---|
| $x-2=3$ | arba | $x-2=-3,$ |
| $x=3+2,$ | | $x=-3+2,$ |
| $x=5,$ | | $x=-1.$ |

*Atsakymas.* $x=-1$, $x=5$.




**5b.** $|x+2| > 1.$
Nelygybė yra teisinga su tomis $x$ reikšmėmis, su kuriomis:

| | | |
|---|---|---|
| $x+2>1,$ | arba | $x+2<-1,$ |
| $x>1-2,$ | | $x<-1-2,$ |
| $x>-1,$ | | $x<-3.$ |

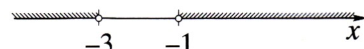


$x \in (-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$

Pravartu pasitikrinti paėmus bent po vieną skaičių iš gautųjų (sprendinių ir nesprendinių) intervalų. Pavyzdžiui:

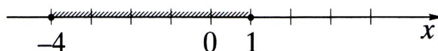
- kai $x=-5 \in (-\infty; -3)$, tai $|-5+2| > 1$ — nelygybė teisinga;
- kai $x=0 \in (-1; +\infty)$, tai $|0+2| > 1$ — nelygybė teisinga;
- kai $x=-2 \in (-3; -1)$, tai $|-2+2| > 1$ — nelygybė neteisinga.

*Atsakymas.* $x \in (-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$.

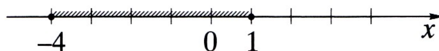


**5c.** $|3+2x| \leqslant 5.$

$$-5 \leqslant 3+2x \leqslant 5,$$
$$-5-3 \leqslant 3+2x-3 \leqslant 5-3,$$
$$-8 \leqslant 2x \leqslant 2,$$
$$-4 \leqslant x \leqslant 1.$$




*Atsakymas.* $x \in [-4; 1]$.




**6.** Panaikinti iracionalumą vardiklyje — reiškia trupmeną pakeisti jai lygia trupmena, kurios vardiklyje nėra iracionaliųjų skaičių (šaknų).
Šaknies ženklas išnyksta pakėlus ją kvadratu, t. y. $(\sqrt{a})^2 = a$. Todėl trupmenos skaitiklį ir vardiklį dauginame iš tokio reiškinio, kad vardiklyje gautume kvadratus. Jei vardiklyje yra reiškinys $a-b$, kuriame $a$ ir (arba) $b$ yra šaknys, tai dauginame iš $a+b$, nes $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. Jei vardiklyje yra $a+b$, tai dauginame iš $a-b$.

**6a.** $\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2-1^2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{1} = \sqrt{2}-1.$

*Atsakymas.* $\sqrt{2}-1$.

**6b.** $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{5-2} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}.$

*Atsakymas.* $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$.

**6c.** Trupmenos vardiklį galima pasirašyti kaip

$$1+(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \quad \text{ar} \quad (1+\sqrt{3})-\sqrt{2},$$

bet patogiausia atskirti didžiausią šaknį:

$$\sqrt{3}-(\sqrt{2}-1).$$

Tada:

$$\frac{2}{\sqrt{3}-(\sqrt{2}-1)} = \frac{2\cdot\left(\sqrt{3}+(\sqrt{2}-1)\right)}{\left(\sqrt{3}-(\sqrt{2}-1)\right)\cdot\left(\sqrt{3}+(\sqrt{2}-1)\right)} = \frac{2\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2}-1)^2} =$$
$$= \frac{2\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)}{3-(2-2\sqrt{2}+1)} = \frac{2\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}.$$

Dabar skaitiklį ir vardiklį dauginame iš $\sqrt{2}$:

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+2-\sqrt{2}}{2}.$$

*Atsakymas.* $\frac{\sqrt{6}+2-\sqrt{2}}{2}$.

**7a.** $|\sqrt{7}-3|+|2-\sqrt{7}|$.
Nustatome reiškinių su moduliu ženklus.
Kadangi $\sqrt{7}\approx 2{,}6$, tai

$$\sqrt{7}-3<0, \quad 2-\sqrt{7}<0.$$

Kadangi tie reiškiniai yra *neigiami*, tai rašydami be modulio tuos reiškinius turime pakeisti priešingais — prieš juos rašysime minuso ženklus:
$|\sqrt{7}-3|+|2-\sqrt{7}|=-(\sqrt{7}-3)-(2-\sqrt{7})=-\sqrt{7}+3-2+\sqrt{7}=1.$

*Atsakymas.* 1.

**7b.** $\frac{(\sqrt{2}-1)^2-(\sqrt{2}+1)^2}{2}$.
Galime taikyti kvadratų skirtumo formulę $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ arba kelti kvadratu $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.
***I būdas.*** Skaitiklio reiškiniui taikome kvadratų skirtumo formulę:

$$\frac{(\sqrt{2}-1)^2-(\sqrt{2}+1)^2}{2}=\frac{(\sqrt{2}-1-\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1)}{2}=$$
$$=\frac{-2\cdot 2\sqrt{2}}{2}=-2\sqrt{2}.$$

***II būdas.*** Skaitiklyje esančius dvinarius keliame kvadratu:

$$\frac{(\sqrt{2}-1)^2-(\sqrt{2}+1)^2}{2}=\frac{(2-2\sqrt{2}+1)-(2+2\sqrt{2}+1)}{2}=$$
$$=\frac{2-2\sqrt{2}+1-2-2\sqrt{2}-1}{2}=\frac{-4\sqrt{2}}{2}=-2\sqrt{2}.$$

*Atsakymas.* $-2\sqrt{2}$.

**7c.** $3\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{10}+5}+\frac{5}{\sqrt{10}-2}-\frac{7}{\sqrt{10}}\right)$.
Panaikinkime trupmenose iracionalumą:

1) $\frac{2}{\sqrt{10}+5}\cdot\frac{\sqrt{10}-5}{\sqrt{10}-5}=\frac{2(\sqrt{10}-5)}{(\sqrt{10})^2-5^2}=\frac{2(\sqrt{10}-5)}{10-25}=\frac{2(\sqrt{10}-5)}{-15}=\frac{2(5-\sqrt{10})}{15}$;

2) $\frac{5}{\sqrt{10}-2}\cdot\frac{\sqrt{10}+2}{\sqrt{10}+2}=\frac{5(\sqrt{10}+2)}{(\sqrt{10})^2-2^2}=\frac{5(\sqrt{10}+2)}{10-4}=\frac{5(\sqrt{10}+2)}{6}$;

3) $\frac{7}{\sqrt{10}}\cdot\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=\frac{7\sqrt{10}}{10}$.

Toliau skaičiuoti paprasta:

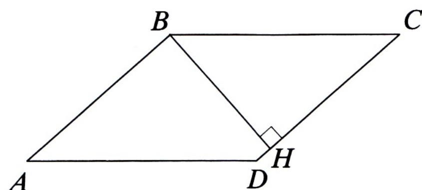
4) $\frac{2(5-\sqrt{10})}{15} + \frac{5(\sqrt{10}+2)}{6} - \frac{7\sqrt{10}}{10} = \frac{20-4\sqrt{10}+25\sqrt{10}+50-21\sqrt{10}}{30} = \frac{70}{30} = \frac{7}{3}$;

5) $3 \cdot \frac{7}{3} = \frac{3\cdot 7}{1\cdot 3} = \frac{7}{1} = 7$.

*Atsakymas*. 7.

**8.** Dviejų lygiagretainio kraštinių ir ilgesniosios aukštinės ilgiai sutinka kaip $5:6:4$. Raskite lygiagretainio perimetrą, jei jo plotas lygus 180.

*Pastaba*. Kadangi lygiagretainio kiekvienos kraštinės ir į ją nubrėžtos aukštinės sandaugos yra lygios (lygios lygiagretainio plotui), tai ilgesnę aukštinę atitinka trumpesnė kraštinė. Jeigu laikysime, kad trumpesnės yra kraštinės $AB = CD$, tai aukštinę, pavyzdžiui, iš viršūnės $B$ reikia brėžti į kraštinę $CD$.




*Duota*: $ABCD$ — lygiagretainis,
$AB : BC : BH = 5 : 6 : 4$,
$S_{ABCD} = 180$.

*Rasti*: $P_{ABCD}$.

*Sprendimas*.

$$AB : BC : BH = 5 : 6 : 4, \quad S_{ABCD} = DC \cdot BH = AB \cdot BH,$$
$$AB = 5x, \quad BC = 6x, \quad BH = 4x,$$
$$180 = 5x \cdot 4x, \quad 180 = 20x^2, \quad x^2 = 9, \quad x_1 = 3, x_2 = -3 \text{ (netinka)}.$$
$$AB = DC = 5 \cdot 3 = 15; \quad BC = AD = 6 \cdot 3 = 18;$$
$$P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(15 + 18) = 2 \cdot 33 = 66.$$

*Atsakymas*. 66.

# Laipsniai ir šaknys

**K2 (2.1–2.3)**

**1.** Laipsnį išreikškite šaknimi.

a) $5^{\frac{6}{5}}$;

b) $2^{2,5}$;

c) $3^{-0,5}$.

**2.** Šaknį išreikškite laipsniu.

a) $\sqrt[3]{6}$;

b) $\sqrt[9]{3^6}$;

c) $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$.

**3.** Apskaičiuokite reiškinio reikšmę.

a) $12^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{-\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{3}{4}}$;

b) $\frac{9\cdot 3^{-2}+4\cdot(\frac{2}{5})^{-2}}{10^0+(\frac{1}{2})^0\cdot(\frac{1}{12})^{-1}}$;

c) $\frac{3^7\cdot 9^{-2}\cdot 5^4+9\cdot 125\cdot(\frac{1}{5})^{-1}}{(3\cdot 5)^4\cdot 3^{-3}}$.

**4.** Suprastinkite reiškinį.

a) $\sqrt[3]{64\cdot 125}$;

b) $\sqrt[3]{\frac{13^6}{11^9}}$;

c) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}\cdot\sqrt[8]{2}$.

**5.** Palyginkite.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}$ ir $\sqrt[5]{\frac{1}{16}}$;

b) $\sqrt[5]{5}$ ir $\sqrt[10]{5\sqrt{5}}$;

c) $\sqrt[3]{-7}$ ir $\sqrt[9]{-27}$.

**6.** Suprastinkite reiškinį.

a) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}-\sqrt[4]{4}$;

b) $\left(\sqrt{\sqrt{6}+1}+\sqrt{\sqrt{6}-1}\right)^2$;

c) $(9-3\sqrt{5})^2+(9+3\sqrt{5})^2$.

**7.** Ritinio pagrindo skersmuo yra 10, o ašinio pjūvio plotas lygus $\frac{18}{\pi}$. Raskite ritinio tūrį.

**1.** Laipsnį išreikškite šaknimi.

a) $4^{\frac{7}{4}}$;

b) $3^{1,5}$;

c) $2^{-0,4}$.

**2.** Šaknį išreikškite laipsniu.

a) $\sqrt[4]{7}$;

b) $\sqrt[11]{6^5}$;

c) $\sqrt{a\sqrt[4]{a}}$.

**3.** Apskaičiuokite reiškinio reikšmę.

a) $24^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{-\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$;

b) $\frac{8 \cdot 2^{-3} + 27 \cdot (\frac{3}{5})^{-3}}{100^0 + (\frac{1}{3})^0 \cdot (\frac{1}{21})^{-1}}$;

c) $\frac{2^{10} \cdot 7^5 \cdot 8^{-2} - 64 \cdot 49 \cdot (\frac{1}{7})^{-2}}{(2 \cdot 7)^4 \cdot 7^{-1}}$.

**4.** Suprastinkite reiškinį.

a) $\sqrt[3]{243 \cdot 81}$;

b) $\sqrt[5]{\frac{6^{10}}{32}}$;

c) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} \cdot \sqrt[8]{3}$.

**5.** Palyginkite.

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$ ir $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$;

b) $\sqrt[6]{6}$ ir $\sqrt[12]{6\sqrt{6}}$;

c) $\sqrt[5]{-8}$ ir $\sqrt[15]{-125}$.

**6.** Suprastinkite reiškinį.

a) $\sqrt{(\sqrt{3} - 3)^2} + \sqrt[4]{9}$;

b) $\left(\sqrt{2 + \sqrt{5}} + \sqrt{\sqrt{5} - 2}\right)^2$;

c) $(10 - 7\sqrt{2})^2 + (10 + 7\sqrt{2})^2$.

**7.** Ritinio ašinis pjūvis — kvadratas, kurio plotas lygus $\frac{64}{\pi}$. Raskite ritinio viso paviršiaus plotą.

**1.**

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (m \in \boldsymbol{Z}, n \in \boldsymbol{N}, n > 1),$$
$$a^{-q} = \frac{1}{a^q} \quad (a > 0).$$

**1a.** $5^{\frac{6}{5}} = \sqrt[5]{5^6}.$

*Atsakymas*. $\sqrt[5]{5^6}.$

**1b.** $2^{2,5} = 2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2^5}.$

*Atsakymas*. $\sqrt{2^5}.$

**1c.** $3^{-0,5} = 3^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3}}.$

*Atsakymas*. $\sqrt{\frac{1}{3}}.$

**2.**

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n\cdot k]{a} \quad (a \geqslant 0, n \in \boldsymbol{N}, k \in \boldsymbol{N}, n > 1, k > 1).$$

**2a.** $\sqrt[3]{6} = 6^{\frac{1}{3}}.$

*Atsakymas*. $6^{\frac{1}{3}}.$

**2b.** $\sqrt[9]{3^6} = 3^{\frac{6}{9}} = 3^{\frac{2}{3}}.$

*Atsakymas*. $3^{\frac{2}{3}}.$

**2c.** ***I būdas.***

$$\sqrt{a\sqrt[3]{a}} = \sqrt{a} \cdot \sqrt[2\cdot 3]{a} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}} = a^{\frac{3+1}{6}} = a^{\frac{4}{6}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

***II būdas.***

$$\sqrt{a\sqrt[3]{a}} = \sqrt{\sqrt[3]{a^3 \cdot a}} = \sqrt{\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[6]{a^4} = a^{\frac{4}{6}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

*Atsakymas*. $a^{\frac{2}{3}}.$

**3.**

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (m, n \in \boldsymbol{N}, a \in \boldsymbol{R}),$$
$$(a^p)^q = a^{p\cdot q} \quad (a > 0),$$
$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0),$$
$$(a \cdot b)^q = a^q \cdot b^q \quad (a, b > 0).$$

**3a.**

$$12^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{4}} = (3 \cdot 4)^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{1}{4}} \cdot 4^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{4}} =$$
$$= 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{4}} \cdot (2^2)^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = 3^1 \cdot 2^0 = 3 \cdot 1 = 3.$$

*Atsakymas*. 3.

**3b.**

$$\frac{9\cdot 3^{-2}+4\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}}{10^0+\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^{-1}}=\frac{9\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+4\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2}{1+1\cdot\left(\frac{12}{1}\right)^1}=\frac{1+25}{13}=\frac{26}{13}=2.$$

*Atsakymas*. 2.

**3c.**

$$\frac{3^7\cdot 9^{-2}\cdot 5^4+9\cdot 125\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}}{(3\cdot 5)^4\cdot 3^{-3}}=\frac{3^7\cdot(3^2)^{-2}\cdot 5^4+3^2\cdot 5^3\cdot 5^1}{3^4\cdot 5^4\cdot 3^{-3}}=$$

$$=\frac{3^{7-4}\cdot 5^4+3^2\cdot 5^4}{5^4\cdot 3}=\frac{3^3\cdot 5^4+3^2\cdot 5^4}{5^4\cdot 3}=\frac{3\cdot 5^4\cdot(3^2+3)}{5^4\cdot 3}=12.$$

*Atsakymas*. 12.

**4.**

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};\qquad \sqrt[n\cdot k]{a^k}=\sqrt[n]{a}\quad (k,n>1,\ k,n\in\boldsymbol{N},\ a\geqslant 0, b>0).$$

**4a.** $\sqrt[3]{64\cdot 125}=\sqrt[3]{4^3\cdot 5^3}=\sqrt[3]{(4\cdot 5)^3}=4\cdot 5=20.$

*Atsakymas*. 20.

**4b.** $\sqrt[3]{\frac{13^6}{11^9}}=\frac{\sqrt[3]{13^6}}{\sqrt[3]{11^9}}=\frac{13^2}{11^3}=\frac{169}{1331}.$

*Atsakymas*. $\frac{169}{1331}$.

**4c.** ***I būdas.***

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}\cdot\sqrt[8]{2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\cdot\sqrt[8]{2}=$$

$$=2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{8}}\cdot 2^{\frac{1}{8}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}=2^{\frac{4+2+1+1}{8}}=2^1=2.$$

***II būdas.***

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}\cdot\sqrt[8]{2}=\sqrt[2\cdot 2\cdot 2]{2^4\cdot 2^2\cdot 2}\cdot\sqrt[8]{2}=\sqrt[8]{2^7}\cdot\sqrt[8]{2}=\sqrt[8]{2^8}=2.$$

*Atsakymas*. 2.

**5a.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}$ ir $\sqrt[5]{\frac{1}{16}}$.
***I būdas.***

$$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^4}\ \text{ ir }\ \sqrt[5]{\frac{1}{16}},\qquad \sqrt[3]{\frac{1}{16}}\ \text{ ir }\ \sqrt[5]{\frac{1}{16}}.$$

Kadangi $\frac{1}{16}<1$, tai $\sqrt[3]{\frac{1}{16}}<\sqrt[5]{\frac{1}{16}}$.

***II būdas.***

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}} \quad \text{ir} \quad \sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^4}, \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}} \quad \text{ir} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{5}}.$$

Kadangi $\frac{1}{2} < 1$, o $\frac{4}{3} > \frac{4}{5}$, tai $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{5}}$.

*Atsakymas.* $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}} < \sqrt[5]{\frac{1}{16}}$.

**5b.** $\sqrt[5]{5}$ ir $\sqrt[10]{5\sqrt{5}}$.

***I būdas.***

$$\sqrt[5]{5} \quad \text{ir} \quad \sqrt[10]{\sqrt{5 \cdot 5^2}},$$
$$\sqrt[5\cdot 4]{5^4} \quad \text{ir} \quad \sqrt[20]{5^3},$$
$$\sqrt[20]{5^4} > \sqrt[20]{5^3}, \quad \text{nes} \quad 5^4 > 5^3.$$

***II būdas.*** Abu reiškinius keliame 10-tuoju laipsniu:

$$5^2 \quad \text{ir} \quad 5\sqrt{5}.$$

Keliame kvadratu:

$$5^4 \text{ ir } 5^2 \cdot 5,$$
$$5^4 > 5^3.$$

*Atsakymas.* $\sqrt[5]{5} > \sqrt[10]{5\sqrt{5}}$.

**5c.** $\sqrt[3]{-7}$ ir $\sqrt[9]{-27}$.

***I būdas.***

$$-\sqrt[3]{7} \text{ ir } -\sqrt[9]{3^3}, \quad -\sqrt[3]{7} < -\sqrt[3]{3}, \quad \text{nes} \quad \sqrt[3]{7} > \sqrt[3]{3}.$$

***II būdas.*** Keliame trečiuoju laipsniu:

$$-7 \text{ ir } \sqrt[3]{-27}, \quad -7 < -3.$$

*Atsakymas.* $\sqrt[3]{-7} < \sqrt[9]{-27}$.

**6a.** $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} - \sqrt[4]{4} = |1-\sqrt{2}| - \sqrt[4]{2^2}$.

Kadangi $1-\sqrt{2} < 0$, tai rašydami be modulio reiškinio $1-\sqrt{2}$ ženklą keičiame priešingu:

$$|1-\sqrt{2}| - \sqrt[4]{2^2} = -(1-\sqrt{2}) - \sqrt{2} = -1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} = -1.$$

*Atsakymas.* $-1$.

**6b.**

$$\left(\sqrt{\sqrt{6}+1} + \sqrt{\sqrt{6}-1}\right)^2 =$$
$$= \left(\sqrt{\sqrt{6}+1}\right)^2 + 2\cdot\sqrt{\sqrt{6}+1}\cdot\sqrt{\sqrt{6}-1} + \left(\sqrt{\sqrt{6}-1}\right)^2 =$$
$$= \sqrt{6}+1+2\sqrt{(\sqrt{6}+1)(\sqrt{6}-1)} + \sqrt{6}-1 =$$
$$= 2\sqrt{6} + 2\sqrt{(\sqrt{6})^2 - 1^2} = 2\sqrt{6} + 2\sqrt{6-1} =$$
$$= 2\sqrt{6} + 2\sqrt{5} = 2(\sqrt{6}+\sqrt{5}).$$

*Atsakymas.* $2(\sqrt{6}+\sqrt{5})$.

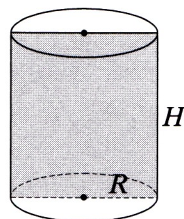
**6c.**

$$(9-3\sqrt{5})^2 + (9+3\sqrt{5})^2 =$$
$$= 9^2 - 2\cdot 9\cdot 3\sqrt{5} + (3\sqrt{5})^2 + 9^2 + 2\cdot 9\cdot 3\sqrt{5} + (3\sqrt{5})^2 =$$
$$= 2(81 + 9\cdot 5) = 2\cdot 126 = 252.$$

*Atsakymas.* 252.

**7.** Ritinio pagrindo skersmuo yra 10, o ašinio pjūvio plotas lygus $\frac{18}{\pi}$. Raskite ritinio tūrį.

*Duota*: ritinys, $S_{\text{pj.}} = \frac{18}{\pi}$, $d = 10$.
*Rasti*: $V_{\text{ritinio}}$.
*Sprendimas*.




$$V = \pi R^2 H, \quad R = \frac{d}{2} = \frac{10}{2} = 5;$$
$$S_{\text{pj.}} = d\cdot H, \quad \frac{18}{\pi} = 10\cdot H, \quad H = \frac{18}{\pi} : 10 = \frac{9}{5\pi};$$
$$V = \pi\cdot 5^2\cdot\frac{9}{5\pi} = 45.$$

*Atsakymas.* 45.

# Algebriniai reiškiniai

K3 (3.1–3.2)

**1.** Nustatykite reiškinio apibrėžimo sritį.

a) $\frac{x^3-8}{4x^2-1}$;

b) $\sqrt{-2x+4}$;

c) $\frac{3-x}{x^2-4x-21}+\frac{x^2+x-6}{\sqrt{9-x}}$.

**2.** Suprastinkite reiškinį ir apskaičiuokite jo reikšmę.

a) $(a+1)^3-a(3a+1)$, kai $a=-2$;

b) $\frac{3m+6\sqrt{mn}+3n}{6n-6m}$, kai $m=\frac{1}{4}$, $n=\frac{1}{9}$;

c) $\frac{(a-2)^2}{a^2-5a}\cdot\frac{2a-10}{4-a^2}$, kai $a=-\frac{1}{2}$.

**3.** Įrodykite tapatybę.

a) $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-b}{\sqrt{ab}+2b}=\sqrt{\frac{a}{b}}$;

b) $\left(\frac{3x+4}{4x^2-25}-\frac{1}{2x-5}\right)\cdot\frac{25+10x}{x-1}+\frac{2x}{5-2x}=-1$;

c) $\frac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}-\frac{a^{\frac{4}{3}}-b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}=-\sqrt[3]{ab}$.

**4.** Suskaidykite reiškinio apibrėžimo sritį į atitinkamas dalis ir užrašykite reiškinį be modulio ženklo.

a) $\frac{|x|+3x}{x}$;

b) $\sqrt{(x-1)^2}+|x-5|$;

c) $\sqrt[4]{\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^4}+3\sqrt[3]{x^3}$.

**5.** Lygiagretainio įstrižainių ilgių kvadratų suma lygi 178, o jo perimetras — 26. Apskaičiuokite lygiagretainio trumpesniosios kraštinės ilgį.

**1.** Nustatykite reiškinio apibrėžimo sritį.

a) $\frac{x^3-27}{9x^2-4}$;

b) $\sqrt{-5x+10}$;

c) $\frac{x^2+3x-4}{\sqrt{16-x}} - \frac{3+x}{x^2+x-20}$.

**2.** Suprastinkite reiškinį ir apskaičiuokite jo reikšmę.

a) $6a(a+2)-(a+2)^3$, kai $a=-3$;

b) $\frac{2d-2c}{6d-12\sqrt{dc}+6c}$, kai $d=\frac{4}{9}$, $c=\frac{1}{4}$;

c) $\frac{(a+3)^2}{a^2+4a} \cdot \frac{12+3a}{9-a^2}$, kai $a=-\frac{2}{3}$.

**3.** Įrodykite tapatybę.

a) $\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+4\sqrt{xy}}{x+\sqrt{xy}} = 1+\sqrt{\frac{y}{x}}$;

b) $\frac{b-3}{b} + \frac{b-3}{3b^2} : \left(\frac{1}{3b+9} + \frac{1}{b^2-3b} - \frac{2}{b^2-9}\right) = 2$;

c) $\frac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}{x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y} = 2\sqrt{x}$.

**4.** Suskaidykite reiškinio apibrėžimo sritį į atitinkamas dalis ir užrašykite reiškinį be modulio ženklo.

a) $\frac{|x+1|}{x+1} + 2x - 4$;

b) $\sqrt{(x-3)^2} + |x-1|$;

c) $\sqrt[6]{\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)^6} - 2\sqrt[5]{(x+1)^5}$.

**5.** Lygiagretainio įstrižainių ilgių kvadratų suma lygi 626, o gretimų kraštinių ilgių suma — 25. Apskaičiuokite lygiagretainio ilgesniosios kraštinės ilgį.

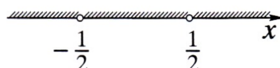
**1a.** $\frac{x^3-8}{4x^2-1}$.

Trupmenos vardiklis negali būti lygus nuliui. Todėl rasime $x$ reikšmes, su kuriomis vardiklis lygus nuliui ir jas atmesime.

***I būdas.***

$$4x^2-1=0, \quad 4x^2=1, \quad x^2=\frac{1}{4}, \quad x_1=-\frac{1}{2}, \; x_2=\frac{1}{2}.$$

Vadinasi, atmesti reikia $-\frac{1}{2}$ ir $\frac{1}{2}$.




***II būdas.***

$$4x^2-1=0, \quad (2x-1)(2x+1)=0,$$

$$2x-1=0, \quad 2x=1, \quad x=\frac{1}{2};$$

$$2x+1=0, \quad 2x=-1, \quad x=-\frac{1}{2}.$$

*Atsakymas.* $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

**1b.** $\sqrt{-2x+4}$.

Šaknis turi prasmę, kai pošaknis yra neneigiamas:

$$-2x+4 \geqslant 0, \quad -2x \geqslant -4, \quad x \leqslant 2.$$

*Atsakymas.* $x \in (-\infty; 2]$.

**1c.** $\frac{3-x}{x^2-4x-21} + \frac{x^2+x-6}{\sqrt{9-x}}$.

Reikės atmesti tas $x$ reikšmes, su kuriomis pirmos trupmenos vardiklis lygus 0:

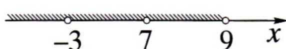
$$x^2-4x-21=0, \quad x=-3 \quad \text{ir} \quad x=7.$$

Antros trupmenos pošaknis turi būti teigiamas:

$$9-x>0, \quad x<9.$$

Taigi

$$\begin{cases} x \neq -3, x \neq 7, \\ x < 9. \end{cases}$$




*Atsakymas.* $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 7) \cup (7; 9)$.

**2.**

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2, \quad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2, \quad (a-b)^2 = (b-a)^2;$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;$$
$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

**2a.** $(a+1)^3 - a(3a+1)$.

Galima remtis sumos kubo formule:

$$(a+1)^3 - a(3a+1) = a^3+3a^2+3a+1-3a^2-a = a^3+2a+1.$$

Bet paprasta apsieiti ir be jos:

$$\begin{aligned}(a+1)^3 - a(3a+1) &= (a+1)^2\cdot(a+1) - 3a^2 - a = \\ &= (a^2+2a+1)(a+1) - 3a^2 - a = \\ &= a^3+2a^2+a+a^2+2a+1-3a^2-a = \\ &= a^3+2a+1.\end{aligned}$$

Kai $a=-2$, tai

$$a^3+2a+1 = (-2)^3+2\cdot(-2)+1 = -8-4+1 = -11.$$

*Atsakymas.* $-11$.

**2b.** $\frac{3m+6\sqrt{mn}+3n}{6n-6m}$.

Skaitiklį ir vardiklį skaidome dauginamaisiais ir prastiname:

$$\begin{aligned}\frac{3m+6\sqrt{mn}+3n}{6n-6m} &= \frac{3(m+2\sqrt{mn}+n)}{6(n-m)} = \frac{(\sqrt{m})^2+2\sqrt{mn}+(\sqrt{n})^2}{2(n-m)} = \\ &= \frac{(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2}{2(n-m)}.\end{aligned}$$

Kai $m=\frac{1}{4}$, $n=\frac{1}{9}$, tai

$$\begin{aligned}\frac{(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2}{2(n-m)} &= \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{1}{9}}\right)^2}{2\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{4}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^2}{2\cdot\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{4}\right)} = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2}{2\cdot\left(-\frac{5}{36}\right)} = \\ &= \frac{\frac{25}{36}}{-\frac{10}{36}} = \frac{25}{36}\cdot\left(-\frac{36}{10}\right) = -\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

*Atsakymas.* $-2\frac{1}{2}$.

**2c.** $\frac{(a-2)^2}{a^2-5a} \cdot \frac{2a-10}{4-a^2}$.

Skaidome dauginamaisiais ir prastiname:

$$\frac{(a-2)^2}{a^2-5a} \cdot \frac{2a-10}{4-a^2} = \frac{(a-2)^2 \cdot 2(a-5)}{a(a-5)\cdot(2-a)(2+a)} =$$

$$= \frac{2(2-a)^2}{a(2-a)(2+a)} =$$

$$= \frac{2(2-a)}{a(2+a)}.$$

Kai $a = -\frac{1}{2}$, tai

$$\frac{2(2-a)}{a(2+a)} = \frac{2\cdot\left(2+\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}\cdot\left(2-\frac{1}{2}\right)} = \frac{4+1}{-1+\frac{1}{4}} = \frac{5}{-\frac{3}{4}} = -\frac{20}{3} = -6\frac{2}{3}.$$

*Atsakymas.* $-6\frac{2}{3}$.

**3a.** $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-b}{\sqrt{ab}+2b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

$$\boxed{\left(\sqrt{a}\right)^2 = a}$$

Suprastinkime reiškinį $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-b}{\sqrt{ab}+2b}$:

$$\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-b}{\sqrt{ab}+2b} = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2+2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2-b}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+2\cdot\left(\sqrt{b}\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b-b}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+2\left(\sqrt{b}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+2\sqrt{b}\right)}{\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+2\sqrt{b}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Vadinasi, duotoji lygybė yra teisinga.

**3b.** $\left(\frac{3x+4}{4x^2-25} - \frac{1}{2x-5}\right) \cdot \frac{25+10x}{x-1} + \frac{2x}{5-2x} = -1.$

Suprastinkime reiškinį $\left(\frac{3x+4}{4x^2-25} - \frac{1}{2x-5}\right) \cdot \frac{25+10x}{x-1} + \frac{2x}{5-2x}$:

1) $$\frac{3x+4}{4x^2-25} - \frac{1}{2x-5} = \frac{3x+4}{(2x-5)(2x+5)} - \frac{1}{2x-5} =$$
$$= \frac{3x+4}{(2x-5)(2x+5)} - \frac{2x+5}{(2x-5)(2x+5)} =$$
$$= \frac{3x+4-(2x+5)}{(2x-5)(2x+5)} = \frac{3x+4-2x-5}{(2x-5)(2x+5)} = \frac{x-1}{(2x-5)(2x+5)};$$

2) $$\frac{(x-1)\cdot(25+10x)}{(2x-5)(2x+5)\cdot(x-1)} = \frac{5(5+2x)}{(2x-5)(2x+5)} = \frac{5}{2x-5};$$

3) $$\frac{5}{2x-5} + \frac{2x}{5-2x} = \frac{5}{2x-5} - \frac{2x}{2x-5} = \frac{5-2x}{2x-5} = \frac{-(2x-5)}{2x-5} = -1.$$

**3c.** $\frac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}} - \frac{a^{\frac{4}{3}}-b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}} = -\sqrt[3]{ab}.$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Kairiąją lygybės pusę pertvarkykime remdamiesi kubų sumos formule:

$$\frac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}} - \frac{a^{\frac{4}{3}}-b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}} = \frac{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}} - \frac{\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^2-\left(b^{\frac{2}{3}}\right)^2}{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}} =$$
$$= \frac{\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}} - \frac{\left(a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}} =$$
$$= a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}} = -a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} = -(ab)^{\frac{1}{3}} = -\sqrt[3]{ab}.$$

Galima apsieiti ir be kubų sumos formulės:

$$\frac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}} - \left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{a+b-\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)\cdot\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}} =$$
$$= \frac{a+b-a-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}-b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}} =$$
$$= -\frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}} = -a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} = -\sqrt[3]{ab}.$$

**4.**

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{kai } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{kai } x < 0. \end{cases}$$

$\sqrt[2n]{x^{2n}} = |x|$, $\sqrt[2n+1]{x^{2n+1}} = x$, kai $n \in \boldsymbol{N}$.

**4a.** $\frac{|x|+3x}{x}$.

1) Kai $x < 0$, tai $\frac{|x|+3x}{x} = \frac{-x+3x}{x} = \frac{2x}{x} = 2$.

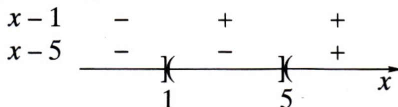
2) Kai $x > 0$, tai $\frac{|x|+3x}{x} = \frac{x+3x}{x} = \frac{4x}{x} = 4$.

*Atsakymas*. Kai $x < 0$, tai $\frac{|x|+3x}{x} = 2$; kai $x > 0$, tai $\frac{|x|+3x}{x} = 4$.

**4b.** $\sqrt{(x-1)^2} + |x-5| = |x-1| + |x-5|$;

$x - 1 = 0, \quad x = 1$;

$x - 5 = 0, \quad x = 5$.




1) Kai $x \leqslant 1$, tai

$$|x-1| + |x-5| = -(x-1) - (x-5) = -x + 1 - x + 5 = -2x + 6.$$

2) Kai $1 < x \leqslant 5$, tai

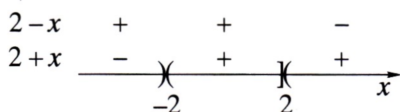
$$|x-1| + |x-5| = x - 1 - (x-5) = x - 1 - x + 5 = 4.$$

3) Kai $x > 5$, tai

$$|x-1| + |x-5| = x - 1 + x - 5 = 2x - 6.$$

*Atsakymas*. $\sqrt{(x-1)^2} + |x-5| = \begin{cases} -2x+6, & \text{kai } x \leqslant 1; \\ 4, & \text{kai } 1 < x \leqslant 5; \\ 2x-6, & \text{kai } x > 5. \end{cases}$

**4c.** $\sqrt[4]{\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^4} + 3\sqrt[3]{x^3} = \left|\frac{2-x}{2+x}\right| + 3x = \frac{|2-x|}{|2+x|} + 3x$.




1) Kai $x < -2$, tai

$$\frac{|2-x|}{|2+x|} + 3x = \frac{2-x}{-(2+x)} + 3x = -\frac{2-x}{2+x} + 3x =$$

$$= \frac{-(2-x)}{2+x} + \frac{3x \cdot (2+x)}{2+x} = \frac{-2+x+6x+3x^2}{2+x} =$$

$$= \frac{3x^2+7x-2}{2+x}.$$

2) Kai $-2 < x \leqslant 2$, tai

$$\frac{|2-x|}{|2+x|}+3x=\frac{2-x}{2+x}+3x=\frac{2-x}{2+x}+\frac{3x\cdot(2+x)}{2+x}=$$
$$=\frac{2-x+6x+3x^2}{2+x}=\frac{3x^2+5x+2}{2+x}.$$

3) Kai $x > 2$, tai

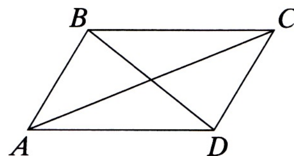
$$\frac{|2-x|}{|2+x|}+3x=\frac{-(2-x)}{2+x}+3x=\frac{-2+x+3x(2+x)}{2+x}=\frac{3x^2+7x-2}{2+x}.$$

Gavome tą patį 1) punkto reiškinį.

*Atsakymas.* $\sqrt[4]{\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^4}+3\sqrt[3]{x^3}=\left[\begin{array}{ll}\frac{3x^2+7x-2}{2+x}, & \text{kai } x<-2 \text{ ir kai } x>2;\\ \frac{3x^2+5x+2}{2+x}, & \text{kai } -2<x\leqslant 2.\end{array}\right.$

**5.** Lygiagretainio įstrižainių ilgių kvadratų suma lygi 178, o jo perimetras — 26. Apskaičiuokite lygiagretainio trumpesniosios kraštinės ilgį.

*Duota*: $ABCD$ — lygiagretainis,
$AC^2 + BD^2 = 178$,
$P_{ABCD} = 26$.
*Rasti*: $AB$.




*Sprendimas.* Pažymėkime $AB = CD = x$, $BC = AD = y$,

$$P_{ABCD}=2(x+y),\quad 2(x+y)=26,\quad x+y=13,\quad x=13-y.$$

Lygiagretainio įstrižainių ilgių kvadratų suma lygi jo visų kraštinių ilgių kvadratų sumai:

$$AC^2+BD^2=2(x^2+y^2),\quad 2x^2+2y^2=178,\quad x^2+y^2=89,$$
$$(13-y)^2+y^2=89,\quad 169-26y+y^2+y^2=89,$$
$$y^2-13y+40=0,$$
$$D=(-13)^2-4\cdot1\cdot40=9,\quad y=\frac{13+3}{2}=8 \text{ arba } y=\frac{13-3}{2}=5.$$

Jei $y = 8$, tai $x = 13 - 8 = 5$, o jei $y = 5$, tai $x = 13 - 5 = 8$. Abiem atvejais lygiagretainio kraštinės yra 5 ir 8, o trumpesnioji — 5.

*Atsakymas.* 5.

1. Ar ekvivalenčios lygtys:
a) $(x-3)(x+2)=0$ ir $x^2-6=x$?
b) $(x-1)^2=4x^2$ ir $x^3=x$?
c) $\frac{x^2-1}{x-1}=2$ ir $x+1=2$?
2. Išspręskite racionaliąją lygtį.
a) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x}=3$;
b) $\frac{2x^2+7x-4}{x^2-5x+4}=0$;
c) $\frac{1}{2}-\frac{2}{x-2}=\frac{4}{2x-x^2}$.
3. Išspręskite lygtį, pakeitę nežinomąjį.
a) $(x^2+5x)^2-2(x^2+5x)=24$;
b) $\frac{x}{x-1}-\frac{3(x-1)}{x}=2$;
c) $\frac{x-3}{x^2+4x+9}-\frac{x^2+4x+9}{3-x}=-2$.
4. Išspręskite bikvadratinę lygtį.
a) $x^4-13x^2+36=0$;
b) $x^4-8x^2-9=0$;
c) $x^4-x^2-1=0$.
5. Išspręskite iracionaliąją lygtį.
a) $\sqrt{x-1}=\sqrt{2-x}$;
b) $\sqrt{7-x}+1=x$;
c) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}=2$.
6. Su kuriomis parametro $a$ reikšmėmis lygtis turi vieną sprendinį?
a) $x^2+ax+4=0$;
b) $ax^2+2x+1=0$;
c) $ax^2+x+a=0$.
7. Stačiojo trikampio statinių ilgiai yra 20 ir 21. Apskaičiuokite ilgį apskritimo, apibrėžto apie šį trikampį.

**1.** Ar ekvivalenčios lygtys:
a) $(x-4)(x+2)=0$ ir $x^2-2x=8$?
b) $(x-2)^2=16x^2$ ir $x^2=x$?
c) $\frac{x^2-1}{x-1}=5$ ir $x+1=5$?

**2.** Išspręskite racionaliąją lygtį.
a) $\frac{2}{x}-\frac{3}{x}=4$;
b) $\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2}=0$;
c) $\frac{1}{x-1}+\frac{9}{2x+8}+\frac{x+1}{2-2x}=0$.

**3.** Išspręskite lygtį, pakeitę nežinomąjį.
a) $(x^2+2x)^2-14(x^2+2x)=15$;
b) $\frac{x}{x-1}-\frac{2(x-1)}{x}=1$;
c) $\frac{x^2+x-5}{x}-\frac{3x}{5-x^2-x}=-4$.

**4.** Išspręskite bikvadratinę lygtį.
a) $y^4-17y^2+16=0$;
b) $y^4-7y^2-144=0$;
c) $y^4+6y^2+4=0$.

**5.** Išspręskite iracionaliąją lygtį.
a) $\sqrt{x-3}=\sqrt{1-x}$;
b) $\sqrt{x+1}+5=x$;
c) $\sqrt{x-2}+\sqrt{3x-2}=2$.

**6.** Su kuriomis parametro $a$ reikšmėmis lygtis turi vieną sprendinį?
a) $x^2+ax+5=0$;
b) $ax^2+4x+2=0$;
c) $ax^2+2x+a=0$.

**7.** Apie statųjį trikampį apibrėžto apskritimo spindulio ilgis yra 7,5. Apskaičiuokite šio trikampio plotą, jei vieno jo statinio ilgis yra 9.

**1.** Jeigu dvi lygtys turi tuos pačius sprendinius (arba abi jų neturi), tai jos vadinamos ekvivalenčiomis.

**1a.** $(x-3)(x+2)=0$ ir $x^2-6=x$.

***I būdas.*** Raskime abiejų lygčių sprendinius.

$$(x-3)(x+2)=0.$$

Sandauga lygi nuliui, kai bent vienas dauginamasis lygus nuliui.

$$x-3=0, \quad \text{arba} \quad x+2=0,$$
$$x=3, \qquad x=-2.$$

Lygtis $x^2-6=x$ yra kvadratinė. Ją spręsime remdamiesi diskriminantu:

$$x^2-x-6=0, \quad D=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-6)=25,$$
$$x_1=\frac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\cdot 1}=\frac{1-5}{2}=-2, \quad x_2=\frac{1+5}{2}=3.$$

Abiejų lygčių sprendiniai vienodi. Vadinasi, lygtys yra ekvivalenčios.

***II būdas.*** Kad lygtys yra ekvivalenčios, galima pastebėti ir jų nesprendžiant:

$$(x-3)(x+2)=0, \quad x^2+2x-3x-6=0, \quad x^2-x-6=0, \quad x^2-6=x.$$

*Atsakymas*. Lygtys ekvivalenčios.

**1b.** $(x-1)^2=4x^2$ ir $x^3=x$.

***I būdas.*** Sprendžiame pirmąją lygtį:

$$x-1=2x, \quad \text{arba} \quad x-1=-2x,$$
$$x=-1, \qquad x=\frac{1}{3}.$$

Žinoma, galėjome ją spręsti ir ieškodami diskriminanto arba taikyti kvadratų skirtumo formulę:

$$(x-1)^2=4x^2, \quad (x-1)^2-4x^2=0, \quad (x-1)^2-(2x)^2=0,$$
$$(x-1-2x)(x-1+2x)=0, \quad (-x-1)(3x-1)=0.$$

Sandauga lygi 0, kai bent vienas dauginamasis lygus 0.

$$-x-1=0, \quad \text{arba} \quad 3x-1=0,$$
$$x=-1, \qquad x=\frac{1}{3}.$$

Lygties $x^3 = x$ sprendinius rasime skaidydami dauginamaisiais:

$$x^3=x, \quad x^3-x=0, \quad x(x^2-1)=0, \quad x(x-1)(x+1)=0,$$
$$x=0, \quad \text{arba} \quad x-1=0, \quad \text{arba} \quad x+1=0,$$
$$x=1, \qquad x=-1.$$

Abiejų lygčių sprendiniai skirtingi, todėl lygtys nėra ekvivalenčios.
***II būdas.*** Kad lygtys nėra ekvivalenčios, galima pastebėti ir jų nesprendžiant. Akivaizdu, kad $x = 0$ yra lygties $x^3 = x$ sprendinys, bet nėra lygties $(x-1)^2 = 4x^2$ sprendinys: $(0-1)^2 \neq 4 \cdot 0^2$.

*Atsakymas.* Lygtys nėra ekvivalenčios.

**1c.** $\frac{x^2-1}{x-1} = 2$ ir $x + 1 = 2$.
Pirmiausia išspręskime lygtį

$$x+1=2.$$

Jos sprendinys yra $x = 1$. Patikrinkime, ar ši $x$ reikšmė yra lygties $\frac{x^2-1}{x-1} = 2$ sprendinys:
kai $x = 1$, tai lygties $\frac{x^2-1}{x-1} = 2$ vardiklis $x - 1 = 0$.
Tai reiškia, kad $x = 1$ nėra tos lygties sprendinys.
Vadinasi, lygtys nėra ekvivalenčios.

*Atsakymas.* Lygtys neekvivalenčios.

**2.**

Racionaliąją lygtį galima spręsti įvairiai.
***I būdas.*** Suteikiant lygčiai pavidalą $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Kadangi trupmena lygi nuliui, kai skaitiklis lygus nuliui, o vardiklis nelygus nuliui, tai lygtis $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ yra ekvivalenti sistemai $\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0. \end{cases}$
***II būdas.*** Naikinant lygties vardiklius, t. y. dauginant abi lygties puses iš lygties trupmeninių reiškinių bendrojo vardiklio. Išsprendus gautąją netrupmeninę lygtį, būtina patikrinti, ar surastos nežinomojo reikšmės nepaverčia lygties vardiklių nuliu (t. y. ar tinka lygčiai).

**2a.** $\frac{1}{x} + \frac{2}{x} = 3.$

***I būdas.***

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x} = 3, \quad \frac{1}{x} + \frac{2}{x} - 3 = 0, \quad \frac{1+2-3x}{x} = 0, \quad \frac{3-3x}{x} = 0,$$
$$\begin{cases} 3 - 3x = 0, \\ x \neq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ x \neq 0, \end{cases} \quad x = 1.$$

***II būdas.*** $\frac{1}{x} + \frac{2}{x} = 3 \mid \cdot x, \quad 1 + 2 = 3x, \quad x = 1.$ Reikšmė $x = 1$ lygčiai tinka.

*Atsakymas.* 1.

**2b.** $\frac{2x^2+7x-4}{x^2-5x+4} = 0.$

Lygtis ekvivalenti sistemai:

$$\begin{cases} 2x^2 + 7x - 4 = 0, \\ x^2 - 5x + 4 \neq 0. \end{cases}$$

Sprendžiame pirmąją sistemos lygtį:

$$2x^2 + 7x - 4 = 0, \quad D = 49 + 32 = 81,$$
$$x_1 = \frac{-7-9}{4} = -4, \quad x_2 = \frac{-7+9}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Dabar patikrinkime, ar su gautosiomis $x$ reikšmėmis vardiklis nelygus 0:

- kai $x = -4$, tai $x^2 - 5x + 4 = (-4)^2 - 5 \cdot (-4) + 4 = 40 \neq 0$;
- kai $x = 0{,}5$, tai $x^2 - 5x + 4 = 0{,}5^2 - 5 \cdot 0{,}5 + 4 = 1{,}75 \neq 0$.

Galima pirmosios lygties sprendinių netikrinti, o išspręsti antrąją sistemos lygtį.

$$x^2 - 5x + 4 = 0, \quad D = 9, \quad x_1 = 1, x_2 = 4.$$

Tai reiškia, kad skaičiai 1 ir 4 negali būti duotosios racionaliosios lygties sprendiniai. Bet tokių reikšmių negavome spręsdami pirmąją lygtį, todėl nieko atmesti nereikia.

*Atsakymas.* −4; 0,5.

**2c.** $\frac{1}{2} - \frac{2}{x-2} = \frac{4}{2x-x^2}.$

Abi lygties puses padauginkime iš lygties trupmenų bendrojo vardiklio:

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{x-2} = \frac{4}{x(2-x)},$$
$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2-x} = \frac{4}{x(2-x)} \;\Big|\; \cdot 2x(2-x) \neq 0$$
$$x(2-x) + 2 \cdot 2x = 4 \cdot 2,$$
$$2x - x^2 + 4x - 8 = 0.$$

Išsprendžiame gautąją kvadratinę lygtį:

$$x^2 - 6x + 8 = 0, \quad D = 4, \quad x_1 = 2, x_2 = 4.$$

$x = 2$ netinka pradinei lygčiai, nes su šia $x$ reikšme vardiklis lygus 0. Sprendinys $x = 4$ tinka.

*Atsakymas.* 4.

**3a.** $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) = 24.$
Pažymėkime:

$$x^2 + 5x = y.$$

Gauname kvadratinę lygtį:

$$y^2 - 2y = 24, \quad y^2 - 2y - 24 = 0, \quad D = 100, \quad y_1 = -4, y_2 = 6.$$

Kai $y = -4$, tai

$$x^2 + 5x = -4, \quad x^2 + 5x + 4 = 0, \quad D = 9, \quad x_1 = -4, x_2 = -1.$$

Kai $y = 6$, tai

$$x^2 + 5x = 6, \quad x^2 + 5x - 6 = 0, \quad D = 49, \quad x_1 = -6, x_2 = 1.$$

*Atsakymas.* $-6$; $-4$; $-1$; 1.

**3b.** $\frac{x}{x-1} - \frac{3(x-1)}{x} = 2.$
Pažymėkime:

$$\frac{x}{x-1} = y. \quad \text{Tada} \quad \frac{x-1}{x} = \frac{1}{y}.$$

Išsprendžiame lygtį su nauju nežinomuoju:

$$y - \frac{3}{y} = 2, \quad y^2 - 2y - 3 = 0, \quad D = 16, \quad y_1 = -1, y_2 = 3.$$

Randame $x$ reikšmes:
- kai $y = -1$, tai $\frac{x}{x-1} = -1$, $x = -x + 1$, $x = 0{,}5$;
- kai $y = 3$, tai $\frac{x}{x-1} = 3$, $x = 3x - 3$, $x = 1{,}5$.

Tikriname — abu sprendiniai tinka pradinei lygčiai, nes su tomis $x$ reikšmėmis lygtis apibrėžta (vardikliai nelygūs 0).

*Atsakymas.* 0,5; 1,5.

**3c.** $\frac{x-3}{x^2+4x+9} - \frac{x^2+4x+9}{3-x} = -2.$

Pradinė lygtis ekvivalenti lygčiai:

$$\frac{x-3}{x^2+4x+9} + \frac{x^2+4x+9}{x-3} = -2.$$

Pažymėkime:

$$\frac{x-3}{x^2+4x+9} = y.$$

Gauname lygtį su nauju nežinomuoju:

$$y + \frac{1}{y} = -2, \quad y^2 + 2y + 1 = 0, \quad (y+1)^2 = 0, \quad y+1 = 0, \quad y = -1.$$

Sprendžiame lygtį:

$$\frac{x-3}{x^2+4x+9} = -1,$$
$$x - 3 = -x^2 - 4x - 9,$$
$$x^2 + 5x + 6 = 0, \quad D = 1, \quad x_1 = -3, x_2 = -2.$$

*Pasitikriname*. Abi reikšmės tinka.

*Atsakymas*. −3; −2.

**4.** Kadangi $x^4 = (x^2)^2$, tai lygtis, kuriose nežinomųjų yra tik ketvirtas ir antras laipsnis (bikvadratines lygtis), galima spręsti $x^2$ pakeitus nauju nežinomuoju $y$ — pakeičiant lygtį kvadratine.

**4a.** $x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$

Pažymėkime: $x^2 = y$.

Gauname:

$$y^2 - 13y + 36 = 0, \quad D = 25, \quad y_1 = 4, y_2 = 9.$$

Kai $y = 4$, tai $x^2 = 4$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

Kai $y = 9$, tai $x^2 = 9$, $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

*Atsakymas*. −3; −2; 2; 3.

**4b.** $x^4 - 8x^2 - 9 = 0.$

Pažymėkime: $x^2 = y$.
Gauname:

$$y^2 - 8y - 9 = 0, \quad D = 100, \quad y_1 = -1,\ y_2 = 9.$$

Kai $y = -1$, tai $x^2 = -1$. Ši lygtis sprendinių neturi.
Kai $y = 9$, tai $x^2 = 9$, $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

*Atsakymas*. $-3$; $3$.

**4c.** $x^4 - x^2 - 1 = 0.$

Pažymėkime: $x^2 = y$.
Gauname:

$$y^2 - y - 1 = 0, \quad D = 5, \quad y_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ y_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Lygtis $x^2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ sprendinių neturi, nes $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$.
Kai $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, tai

$$x^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_1 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}},\ x_2 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

*Atsakymas*. $-\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$; $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

**5.**

| |
|---|
| Lygtis su kvadratinėmis šaknimis dažnai patogu spręsti keliant abi jos puses kvadratu — naikinant šaknis.<br>Būtina pasitikrinti, ar gautos nežinomojo reikšmės yra pradinės lygties sprendiniai, nes keliant kvadratu galima gauti lygtį, kurios sprendiniai netenkina pradinės lygties. |

**5a.** $\sqrt{x-1} = \sqrt{2-x}.$

Abi puses keliame kvadratu:

$$(\sqrt{x-1})^2 = (\sqrt{2-x})^2, \quad x - 1 = 2 - x, \quad x = 1{,}5.$$

*Patikrinimas*:
$\sqrt{1{,}5-1} = \sqrt{2-1{,}5}$, $\sqrt{0{,}5} = \sqrt{0{,}5}$ — lygybė teisinga.

*Atsakymas*. 1,5.

**5b.** $\sqrt{7-x}+1=x.$

Prieš keldami kvadratu lygtį, radikalą (šaknį) atskiriame:

$$\sqrt{7-x}=x-1, \quad \left(\sqrt{7-x}\right)^2=(x-1)^2,$$

$$7-x=x^2-2x+1, \quad x^2-x-6=0, \quad D=25, \quad x_1=-2, x_2=3.$$

*Patikrinimas*:
kai $x=-2$, tai $\sqrt{7-x}+1=\sqrt{7-(-2)}+1=4$, $4\neq-2$;
kai $x=3$, tai $\sqrt{7-x}+1=\sqrt{7-3}+1=3$, $3=3$ — lygybė teisinga.

*Atsakymas*. 3.

**5c.** $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}=2.$

***I būdas.***

$$\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}\right)^2=2^2,$$

$$x-1+2\sqrt{(x-1)(x+3)}+x+3=4,$$

$$2\sqrt{(x-1)(x+3)}=-2x+2,$$

$$\sqrt{(x-1)(x+3)}=-x+1.$$

Dar kartą keliame kvadratu:

$$\left(\sqrt{(x-1)(x+3)}\right)^2=(-x+1)^2,$$

$$(x-1)(x+3)=(x-1)^2,$$

$$(x-1)(x+3)-(x-1)^2=0,$$

$$(x-1)(x+3-x+1)=0,$$

$$x=1.$$

*Patikrinimas*:
kai $x=1$, tai $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}=\sqrt{1-1}+\sqrt{1+3}=2$, $2=2$ — lygybė teisinga.

***II būdas.*** Kadangi kairė pusė yra didėjanti funkcija (apibrėžta srityje $x\geqslant 1$), tai lygtis gali turėti daugiausiai vieną sprendinį. Matome, kad $x=1$ yra sprendinys.

*Atsakymas*. 1.

**6a.** $x^2+ax+4=0.$

Duotoji lygtis yra kvadratinė. Ji turi vieną sprendinį, kai diskriminantas lygus nuliui.

$$D=a^2-16, \quad a^2-16=0, \quad (a-4)(a+4)=0, \quad a_1=4, \; a_2=-4.$$

*Atsakymas*. $a=-4$, $a=4$.

**6b.** $ax^2 + 2x + 1 = 0.$
Kai $a = 0$, duotoji lygtis nėra kvadratinė — tai tiesinė lygtis

$$2x + 1 = 0,$$

kuri turi vieną sprendinį $x = -\frac{1}{2}$.
Kai $a \neq 0$, tai lygtis yra kvadratinė. Tada:

$$ax^2 + 2x + 1 = 0, \quad D = 4 - 4a, \quad 4 - 4a = 0, \quad a = 1.$$

*Atsakymas*. $a = 0$, $a = 1$.

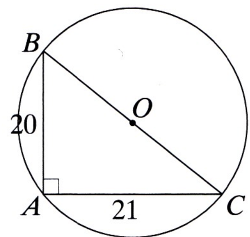
**6c.** $ax^2 + x + a = 0.$
Kai $a = 0$, tai turime lygtį $x = 0$ (vienas sprendinys).
Kai $a \neq 0$, tai lygtis yra kvadratinė:

$$ax^2 + x + a = 0, \quad D = 1 - 4a^2,$$
$$1 - 4a^2 = 0, \quad a^2 = \frac{1}{4}, \quad a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2}.$$

*Atsakymas*. $a = -\frac{1}{2}$, $a = 0$, $a = \frac{1}{2}$.

**7.** Stačiojo trikampio statinių ilgiai yra 20 ir 21. Apskaičiuokite ilgį apskritimo, apibrėžto apie šį trikampį.

*Duota*: $\triangle ABC$ — status,
$\angle A = 90°$,
$AB = 20$, $AC = 21$.
*Rasti*: Apibrėžtinio apskritimo ilgį.




> Apskritimas, kuriam priklauso visos trys trikampio viršūnės, vadinamas apibrėžtu apie tą trikampį.
> Apibrėžto apie trikampį apskritimo centras yra trikampio kraštinių vidurio statmenų susikirtimo taškas.
> Apie statųjį trikampį apibrėžto apskritimo centras yra jo įžambinės vidurio taškas.

*Sprendimas*. Pagal Pitagoro teoremą:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2, \quad BC = \sqrt{20^2 + 21^2} = \sqrt{841} = 29,$$
$$R = \frac{BC}{2} = \frac{29}{2}, \quad C = 2\pi R = 2\pi \cdot \frac{29}{2} = 29\pi.$$

*Atsakymas*. $29\pi$.

# Nelygybės. Lygčių ir nelygybių sistemos

K5 (4.5–4.8)

**1.** Išspręskite nelygybę.

a) $(x-2)^2 - 2x > (3-x)^2 - 9$;

b) $\frac{2x-3}{x-5} > 0$;

c) $\frac{x^2+5x+4}{x^2-5x+4} \geqslant 1$.

**2.** a) Raskite mažiausią teigiamąjį sveikąjį skaičių, tenkinantį nelygybę: $\frac{x^2+4x+4}{x-5} \leqslant 0$.

b) Raskite didžiausią neigiamąjį sveikąjį skaičių, su kuriuo funkcijos $f(x) = \frac{3x-3}{x-5}$ reikšmė mažesnė už 2.

c) Raskite mažiausią neigiamąjį sveikąjį nelygybės $(4-x^2)(x+5)^2 \geqslant 0$ sprendinį.

**3.** a) Raskite visas parametro $a$ reikšmes, su kuriomis lygties $a^2 - ax + 1 = x - a$ sprendinys yra mažesnis už $-3$.

b) Su kuriomis $a$ reikšmėmis lygties $a+2x = 1$ sprendinys yra ne didesnis už lygties $3x - 4a = 9$ sprendinį?

c) Su kuriomis $k$ reikšmėmis lygtis $(k-1)x^2 + (k+4)x + k + 7 = 0$ turi du skirtingus sprendinius?

**4.** Išspręskite lygčių sistemą.

a) $\begin{cases} x^2 + xy = 10, \\ y^2 + xy = 6; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + x^2 = 13, \\ 3x + 2y + x^2 = 20; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{24}{5}, \\ x^2 + y^2 = 26. \end{cases}$

**5.** Užrašykite sveikuosius sprendinius, tenkinančius nelygybių sistemą.

a) $\begin{cases} \frac{x+1}{5} - \frac{x-3}{4} \geqslant 0, \\ \frac{2x-3}{7} + \frac{2-x}{6} > 2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - x - 6 < 0, \\ 1 - \frac{6}{x+1} < 0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + 7 < 8x, \\ x^2 + 16 < 10x. \end{cases}$

**6.** a) Išspręskite nelygybę $x^2 - 5|x| + 6 < 0$.

b) Raskite didžiausią sveikąjį nelygybės $|x-3| > |x+2|$ sprendinį.

c) Išspręskite nelygybę $\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right| \geqslant 1$.

**7.** Lygiašonės trapecijos įstrižainės ilgis yra 16. Ji su ilgesniuoju pagrindu sudaro 45° kampą. Apskaičiuokite trapecijos plotą.

**1.** Išspręskite nelygybę.

a) $(2-x)^2-2x<(x-3)^2+1$;

b) $\frac{x-3}{2x-5}<0$;

c) $\frac{x^2+6x+5}{x^2-6x+5}\leqslant 1$.

**2.** a) Raskite didžiausią neigiamąjį sveikąjį skaičių, tenkinantį nelygybę: $\frac{x^2-6x+9}{x+4}\geqslant 0$.

b) Raskite mažiausią neigiamąjį sveikąjį skaičių, su kuriuo funkcijos $f(x)=\frac{2x-3}{x+2}$ reikšmė didesnė už 3.

c) Raskite didžiausią teigiamąjį sveikąjį nelygybės $(1-x^2)(x-3)^2\geqslant 0$ sprendinį.

**3.** a) Raskite visas parametro $m$ reikšmes, su kuriomis lygties $mx-2m-1=m^2+2x$ sprendinys yra didesnis už 4.

b) Su kuriomis $a$ reikšmėmis lygties $2x-a=7$ sprendinys yra ne didesnis už lygties $5a+3x=11$ sprendinį?

c) Su kuriomis $a$ reikšmėmis lygtis $(2a-5)x^2-2(a-1)x+3=0$ neturi sprendinių?

**4.** Išspręskite lygčių sistemą.

a) $\begin{cases} x^2+xy=12, \\ y^2+xy=4; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y+y^2=13, \\ 2x+3y+y^2=20; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{5}{6}, \\ x^2+y^2=13. \end{cases}$

**5.** Užrašykite sveikuosius sprendinius, tenkinančius nelygybių sistemą.

a) $\begin{cases} \frac{x+6}{4}+\frac{8-x}{3}>3, \\ \frac{7x-10}{11}-\frac{x+1}{2}\geqslant 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2-6x+5<0, \\ 1+\frac{5}{x-7}<0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2+5<6x, \\ x^2-2x<3. \end{cases}$

**6.** a) Išspręskite nelygybę $x^2-7|x|+12<0$.

b) Raskite mažiausią sveikąjį nelygybės $|2x-5|>|4x+7|$ sprendinį.

c) Išspręskite nelygybę $\left|\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}\right|\geqslant 1$.

**7.** Lygiašonės trapecijos pagrindai yra 12 ir 18, o kampo prie didesniojo pagrindo tangentas lygus $\frac{8}{3}$. Apskaičiuokite trapecijos įstrižainės ilgį.

variantas

# Nelygybės. Lygčių ir nelygybių sistemos

**K5 (4.5–4.8)**

**1a.** $(x-2)^2 - 2x > (3-x)^2 - 9.$

Keliame kvadratu ir sutraukiame panašiuosius narius:

$$x^2 - 4x + 4 - 2x > 9 - 6x + x^2 - 9,$$
$$x^2 - 6x + 4 > -6x + x^2,$$
$$4 > 0.$$

Kad ir kokį $x$ imtume, visada gausime teisingą nelygybę $4 > 0$. Taigi duotosios nelygybės sprendiniai yra visi realieji skaičiai.

*Atsakymas.* $x \in \boldsymbol{R}.$

**1b.** $\frac{2x-3}{x-5} > 0.$

***I būdas.*** (Intervalų metodas)

$$\frac{2x-3}{x-5} > 0, \quad \frac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}{x-5} > 0 \mid : 2, \quad \frac{x-1,5}{x-5} > 0.$$

Nežinomojo reikšmės 1,5 ir 5 dalija skaičių tiesę į tris intervalus. Nustatome reiškinių $x - 1,5$ ir $x - 5$ bei dalmens ženklus šiuose intervaluose:

| | $(-\infty; 1,5)$ | $(1,5; 5)$ | $(5; +\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $x-1,5$ | − | + | + |
| $x-5$ | − | − | + |
| $\frac{x-1,5}{x-5}$ | + | − | + |

Nelygybės sprendinių aibė yra $(-\infty; 1,5) \cup (5; +\infty)$.

***II būdas.*** (Sistemų sudarymo būdas)

Trupmena yra teigiama, kai ir skaitiklis, ir vardiklis yra arba teigiami, arba neigiami:

$$\begin{cases} 2x-3 > 0, \\ x-5 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1,5, \\ x > 5; \end{cases} \Rightarrow x \in (5; +\infty).$$

$$\begin{cases} 2x-3 < 0, \\ x-5 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 1,5, \\ x < 5; \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; 1,5).$$

*Atsakymas.* $x \in (-\infty; 1,5) \cup (5; +\infty).$

**1c.** $\frac{x^2+5x+4}{x^2-5x+4} \geqslant 1.$

$$\frac{x^2+5x+4}{x^2-5x+4} - 1 \geqslant 0, \quad \frac{x^2+5x+4-x^2+5x-4}{x^2-5x+4} \geqslant 0,$$
$$\frac{10x}{x^2-5x+4} \geqslant 0, \quad \frac{x}{x^2-5x+4} \geqslant 0.$$

Kvadratinį trinarį $x^2 - 5x + 4$ išskaidome dauginamaisiais:
$x^2 - 5x + 4 = 0, \quad D = 9, \quad x_1 = 1, x_2 = 4,$
$x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4).$
Gauname ekvivalenčią pradinei nelygybę

$$\frac{x}{(x-1)(x-4)} \geqslant 0.$$

Nežinomojo reikšmės 0, 1 ir 4 dalija skaičių tiesę į keturis intervalus. Surašome reiškinių $x$, $x - 1$ ir $x - 4$ bei dalmens ženklus šiuose intervaluose:

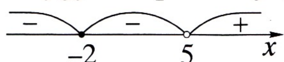
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | − | + | + | + |
| $x-1$ | − | − | + | + |
| $x-4$ | − | − | − | + |
| $\frac{x}{(x-1)(x-4)}$ | − | + | − | + |
| | 0 | 1 | 4 | $x$ |

Kai $x = 1$ ir $x = 4$, trupmena $\frac{x}{(x-1)(x-4)}$ neturi prasmės, todėl šiuos taškus išmetame, o tiesėje žymime baltais skrituliukais.
Kai $x = 0$, trupmena lygi nuliui ($x = 0$ — nelygybės sprendinys). Todėl šis taškas skaičių tiesėje užtušuotas.
Nelygybės sprendinių aibė yra $[0; 1) \cup (4; +\infty)$.

*Atsakymas.* $x \in [0; 1) \cup (4; +\infty)$.

**2a.** $\frac{x^2+4x+4}{x-5} \leqslant 0.$

Išskaidykime skaitiklį tiesiniais dauginamaisiais: $\frac{(x+2)^2}{x-5} \leqslant 0$.
Iš pradžių išsprendžiame šią nelygybę, tada nustatome reikiamą sprendinį.
***I būdas.*** Nustatome dalmens ženklus intervaluose, į kuriuos skaičių tiesę dalija nežinomojo reikšmės $-2$ ir 5. Pereinant per tašką $x = -2$ dalmens ženklas nesikeičia. Taškas $x = 5$ išmetamas (vardiklis = 0), taškas $x = -2$ paliekamas ($-2$ nelygybės sprendinys).




Nelygybės sprendiniai $x \in (-\infty; 5)$.

Mažiausias teigiamas sveikasis skaičius, priklausantis nelygybės sprendinių aibei, yra 1.
***II būdas.*** Matome, kad trupmenos

$$\frac{(x+2)^2}{x-5}$$

skaitiklis su visomis $x$ reikšmėmis yra neneigiamas (didesnis arba lygus 0). Todėl trupmena bus mažesnė už 0 arba lygi 0, kai vardiklis bus neigiamas.
Sprendžiame nelygybę $x - 5 < 0$, $x < 5$.

*Atsakymas.* 1.

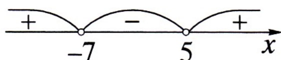
**2b.** $f(x) = \frac{3x-3}{x-5}$.

***I būdas.*** Iš pradžių nustatome visas reikšmes $x$, su kuriomis $f(x) < 2$, t. y. sprendžiame nelygybę

$$\frac{3x-3}{x-5} < 2.$$

Sprendžiame intervalų metodu. Nelygybę pertvarkome taip, kad dešinėje jos pusėje būtų 0:

$$\frac{3x-3}{x-5} < 2, \quad \frac{3x-3}{x-5} - 2 < 0, \quad \frac{3x-3-2x+10}{x-5} < 0, \quad \frac{x+7}{x-5} < 0.$$




Nelygybės sprendiniai sudaro intervalą $(-7; 5)$. Didžiausias neigiamasis sveikasis skaičius jame yra $-1$.

***II būdas.*** Didžiausias neigiamas sveikasis skaičius yra $-1$. Tikriname jį — tinka.

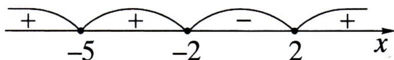
*Atsakymas.* $-1$.

**2c.** $(4-x^2)(x+5)^2 \geqslant 0$.

Antrojo laipsnio dvinarį $4-x^2$ išskaidome pirmojo laipsnio dauginamaisiais:

$$(2-x)(2+x)(x+5)^2 \geqslant 0 \,\Big|\cdot(-1), \quad (x-2)(x+2)(x+5)^2 \leqslant 0.$$

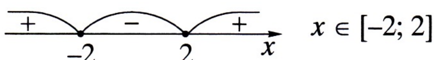
Nustatome sandaugos ženklus intervaluose:




Nelygybė teisinga, kai $x \in [-2; 2]$ ir kai $x = -5$.

Mažiausias neigiamasis sveikasis nelygybės sprendinys yra $-5$.

*Pastaba.* Galėjome dauginamąjį $(x+5)^2$ atmesti, nes su kiekviena $x$ reikšme jis yra neneigiamas, tik reikia neužmiršti, kad $x = -5$ yra nelygybės sprendinys. Sprendžiame nelygybę $(x-2)(x+2) \leqslant 0$:




*Atsakymas.* $-5$.

**3a.** $a^2 - ax + 1 = x - a$.

Lygtyje nežinomasis yra $x$. Aukščiausias $x$ laipsnis yra vienetas, todėl lygtis yra pirmojo laipsnio (tiesinė). Sprendžiame šią lygtį:

$$ax + x = a^2 + a + 1, \quad (a+1)x = a^2 + a + 1.$$

Norime dalyti iš $a + 1$, todėl reikia nagrinėti du atvejus.
1) $a = -1$. Su šia $a$ reikšme gauname neteisingą lygybę $0 = 1$. Tai reiškia, kad su $a = -1$ lygtis sprendinių neturi.
2) $a \neq -1$. Kadangi $a + 1 \neq 0$, tai galima abi lygties puses dalyti iš $a + 1$:

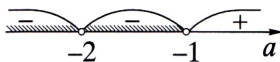
$$x = \frac{a^2 + a + 1}{a + 1}.$$

Ieškome $a$ reikšmių, su kuriomis $x < -3$:

$$\frac{a^2 + a + 1}{a + 1} < -3, \quad \frac{a^2 + a + 1}{a + 1} + 3 < 0, \quad \frac{a^2 + a + 1 + 3a + 3}{a + 1} < 0,$$

$$\frac{a^2 + 4a + 4}{a + 1} < 0,$$

$$\frac{(a+2)^2}{a + 1} < 0.$$




*Atsakymas.* $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1)$.

**3b.** $a + 2x = 1$, $3x - 4a = 9$.

Raskime lygties $a + 2x = 1$ sprendinį:

$$2x = 1 - a, \quad x = \frac{1 - a}{2}.$$

Raskime lygties $3x - 4a = 9$ sprendinį:

$$3x = 9 + 4a, \quad x = \frac{9 + 4a}{3}.$$

Randame $a$ reikšmes, su kuriomis $\frac{1-a}{2} \leqslant \frac{9+4a}{3}$:

$$\frac{1 - a}{2} \leqslant \frac{9 + 4a}{3} \mid \cdot 6, \quad 3 - 3a \leqslant 18 + 8a, \quad 11a \geqslant -15, \quad a \geqslant -\frac{15}{11}.$$

*Atsakymas.* $a \in \left[-\frac{15}{11}; +\infty\right)$.

**3c.** $(k-1)x^2+(k+4)x+k+7=0.$

Išskirkime reikšmę $k=1$, nes su šia $k$ reikšme duotoji lygtis nėra kvadratinė. Ji virsta tiesine lygtimi

$$5x+8=0$$

ir turi tik vieną sprendinį $x=-\frac{8}{5}$.
Kai $k\neq 1$, tai duotoji lygtis yra kvadratinė ir turi du sprendinius, kai $D>0$. Apskaičiuokime diskriminantą:

$$\begin{aligned}D&=(k+4)^2-4(k-1)(k+7)=\\&=k^2+8k+16-4\cdot(k^2-k+7k-7)=\\&=k^2+8k+16-4k^2-24k+28=\\&=-3k^2-16k+44.\end{aligned}$$

Ieškome $k$ reikšmių, su kuriomis $D>0$:

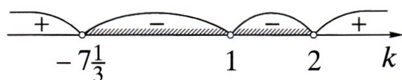
$$-3k^2-16k+44>0,\quad 3k^2+16k-44<0.$$

Kvadratinį trinarį $3k^2+16k-44$ skaidome dauginamaisiais:

$$3k^2+16k-44=0,\quad D=784,\quad k_1=-7\frac{1}{3},\quad k_2=2,$$

$$3\left(k+7\frac{1}{3}\right)(k-2)<0.$$

Iš šios nelygybės sprendinių intervalo $\left(-7\frac{1}{3};\,2\right)$ dar reikia nepamiršti išmesti reikšmę $k=1$.




*Atsakymas*. Lygtis turi du skirtingus sprendinius, kai $k\in\left(-7\frac{1}{3};\,1\right)\cup(1;\,2)$.

**4a.** $\begin{cases}x^2+xy=10,\\ y^2+xy=6.\end{cases}$

Lygčių sistemą reikia pertvarkyti taip, kad gautume tiesinę lygtį, tuomet galėsime vieną nežinomąjį išreikšti kitu.
***I būdas.*** Sudedame sistemos lygtis:

$$x^2+xy+xy+y^2=10+6,$$

$$x^2+2xy+y^2=16,\quad (x+y)^2=16,\quad x+y=-4 \text{ arba } x+y=4,$$

t. y.

$$x = -4 - y \quad \text{arba} \quad x = 4 - y.$$

Gautąsias $x$ išraiškas patogu įsistatyti į (2) lygtį. Kai $x = -4 - y$, tai

$$y^2 + (-4 - y)y = 6, \quad y^2 - 4y - y^2 = 6, \quad 4y = -6, \quad y = -1{,}5;$$
$$x = -4 - (-1{,}5) = -2{,}5.$$

Kai $x = 4 - y$, tai

$$y^2 + (4 - y)y = 6, \quad y^2 + 4y - y^2 = 6, \quad 4y = 6, \quad y = 1{,}5;$$
$$x = 4 - 1{,}5 = 2{,}5.$$

***II būdas.*** Vieną lygtį dalijame iš kitos:

$$\frac{x(x+y)}{y(y+x)} = \frac{10}{6}, \quad \frac{x}{y} = \frac{5}{3}, \quad y = \frac{3}{5}x.$$

Gautą $y$ išraišką įstatome į pirmąją lygtį:

$$x^2 + \frac{3}{5}x^2 = 10, \quad 8x^2 = 50, \quad x^2 = \frac{25}{4}, \quad x_1 = -\frac{5}{2}, \quad x_2 = \frac{5}{2}.$$

Belieka rasti atitinkamas $y$ reikšmes:
- kai $x = -\frac{5}{2}$, tai $y = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{3}{2}$;
- kai $x = \frac{5}{2}$, tai $y = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$. *Atsakymas.* (−2,5; −1,5), (2,5; 1,5).

**4b.** $\begin{cases} x + y + x^2 = 13, \\ 3x + 2y + x^2 = 20. \end{cases}$

Iš kiekvienos lygties galima išsireikšti $y$, bet iš pirmos tai padaryti paprasčiau:

$$y = 13 - x - x^2.$$

Gautą $y$ išraišką statome į antrą lygtį:

$$3x + 2(13 - x - x^2) + x^2 = 20, \quad 3x + 26 - 2x - 2x^2 + x^2 = 20,$$
$$-x^2 + x + 6 = 0, \quad x^2 - x - 6 = 0, \quad D = 25, \quad x_1 = -2, x_2 = 3.$$

Gautosioms $x$ reikšmėms randame atitinkamas $y$ reikšmes:
- kai $x = -2$, tai $y = 13 - (-2) - (-2)^2 = 11$;
- kai $x = 3$, tai $y = 13 - 3 - 3^2 = 1$. *Atsakymas.* (−2; 11), (3; 1).

**4c.** $\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{24}{5}, \\ x^2 + y^2 = 26. \end{cases}$

Panagrinėkime pirmąją lygtį. Pastebime, kad patogu įsivesti naują nežinomąjį. Pažymėkime:

$$\frac{y}{x} = t.$$

Tada

$$\frac{1}{t} - t = \frac{24}{5}, \quad 5 - 5t^2 = 24t,$$

$$5t^2 + 24t - 5 = 0, \quad D = 676, \quad t_1 = \frac{1}{5}, \ t_2 = -5.$$

Grįžtame prie pradinių nežinomųjų.
1) Kai $t = \frac{1}{5}$, tai

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{5}, \quad x = 5y, \quad y = \frac{1}{5}x.$$

Šią išraišką įstatome į antrą sistemos lygtį:

$$(5y)^2 + y^2 = 26, \quad 26y^2 = 26, \quad y^2 = 1, \quad y_1 = 1, \ y_2 = -1.$$

Kai $y = 1$, tai $x = 5$, o kai $y = -1$, tai $x = -5$.
2) Kai $t = -5$, tai

$$\frac{y}{x} = -5, \quad y = -5x.$$

Šią išraišką įstatome į antrą lygtį:

$$x^2 + (-5x)^2 = 26, \quad 26x^2 = 26,$$

$$x^2 = 1, \quad x_1 = -1, \ x_2 = 1.$$

Kai $x = -1$, tai

$$y = -5 \cdot (-1) = 5.$$

Kai $x = 1$, tai

$$y = -5 \cdot 1 = -5.$$

*Atsakymas.* $(-5; -1)$, $(5; 1)$, $(1; -5)$, $(-1; 5)$.

**5a.** $\begin{cases} \frac{x+1}{5} - \frac{x-3}{4} \geqslant 0, \\ \frac{2x-3}{7} + \frac{2-x}{6} > 2. \end{cases}$

Pirmą nelygybę padauginkime iš 20, antrą — iš 42:

$\begin{cases} -x + 19 \geqslant 0, \\ 5x - 4 > 84; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant 19, \\ x > 17{,}6. \end{cases}$

17,6 19 $x$

$x \in (17{,}6; 19]$

Išrenkame sveikuosius skaičius, priklausančius intervalui(17,6; 19]. Tai skaičiai 18 ir 19.

*Atsakymas*. 18; 19.

**5b.** $\begin{cases} x^2 - x - 6 < 0, \\ 1 - \frac{6}{x+1} < 0. \end{cases}$

Išsprendžiame sistemos pirmą (kvadratinę) nelygybę.

$x^2 - x - 6 = 0, \quad D = 25, \quad x_1 = -2, \ x_2 = 3;$

$(x+2)(x-3) < 0,$ + − + ; −2 3 $x$ ; $x \in (-2; 3)$

Išsprendžiame sistemos antrą (racionaliąją) nelygybę:

$$1 - \frac{6}{x+1} < 0, \quad \frac{x+1-6}{x+1} < 0,$$

$\frac{x-5}{x+1} < 0,$ + − + ; −1 5 $x$ ; $x \in (-1; 5)$

Randame bendrus nelygybių (gautųjų intervalų) sprendinius:

$\begin{cases} x \in (-2; 3), \\ x \in (-1; 5). \end{cases}$ −2 −1 3 5 $x$ ; $x \in (-1; 3)$

Išrenkame sveikuosius skaičius, priklausančius intervalui $(-1; 3)$. Tai skaičiai 0; 1; 2.

*Atsakymas*. 0; 1; 2.

**5c.** $\begin{cases} x^2 + 7 < 8x, \\ x^2 + 16 < 10x. \end{cases}$

Abi nelygybės yra kvadratinės.

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 7 < 0, \\ x^2 - 10x + 16 < 0. \end{cases}$$

Kvadratinius trinarius išskaidome dauginamaisiais.

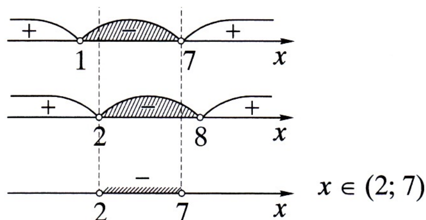
$$x^2 - 8x + 7 = 0, \quad D = 36, \quad x_1 = 1, \; x_2 = 7,$$
$$x^2 - 8x + 7 = (x - 1)(x - 7);$$

$$x^2 - 10x + 16 = 0, \quad D = 36, \quad x_1 = 2, \; x_2 = 8,$$
$$x^2 - 10x + 16 = (x - 2)(x - 8).$$

Turime:

$$\begin{cases} (x - 1)(x - 7) < 0, \\ (x - 2)(x - 8) < 0. \end{cases}$$

Intervalų metodu randame kiekvienos nelygybės sprendinius, po to abiejų sistemos nelygybių bendrus sprendinius:

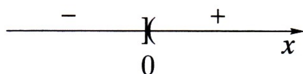



Išrenkame sveikuosius skaičius, priklausančius intervalui (2; 7). Tai skaičiai 3; 4; 5; 6.

*Atsakymas*. 3; 4; 5; 6.

**6a.** $x^2 - 5|x| + 6 < 0.$

***I būdas.*** Taškas $x = 0$ suskaido skaičių tiesę į du intervalus:




Sprendžiame dvi sistemas:

1) $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ x^2 + 5x + 6 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ (x + 3)(x + 2) < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \in (-\infty; 0), \\ x \in (-3; -2); \end{cases}$ $x \in (-3; -2);$

2) $\begin{cases} x > 0, \\ x^2 - 5x + 6 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ (x - 2)(x - 3) < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \in (0; +\infty), \\ x \in (2; 3); \end{cases}$ $x \in (2; 3).$

Nelygybės sprendiniai $x \in (-3; -2) \cup (2; 3)$.

***II būdas.*** Pasižymėkime $|x| = y$, tada $x^2 = y^2$. Sprendžiame nelygybę

$$y^2 - 5y + 6 < 0, \quad (y-2)(y-3) < 0, \quad 2 < y < 3.$$

Grįžtame prie $x$, tada

$$2 < |x| < 3.$$

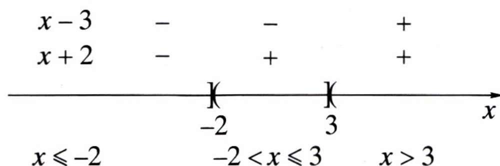
Kai $x$ teigiami, gauname intervalą $(2; 3)$, o kai neigiami — intervalą $(-3; -2)$.

*Atsakymas.* $x \in (-3; -2) \cup (2; 3)$.

**6b.** $|x-3| > |x+2|$.
Randame tas $x$ reikšmes, su kuriomis reiškiniai su modulio ženklu lygūs nuliui:

$$x - 3 = 0, \quad x = 3; \qquad x + 2 = 0, \quad x = -2.$$

Suskaidome skaičių tiesę taškais $x = -2$ ir $x = 3$ į tris intervalus ir kiekviename iš jų nustatome reiškinių su moduliais ženklus:




Sprendžiame tris nelygybių sistemas.

1) $\begin{cases} x \leqslant -2, \\ -(x-3) > -(x+2); \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant -2, \\ -x+3 > -x-2; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant -2, \\ 0 > -5. \end{cases}$

Nelygybė $0 > -5$ yra teisinga. Ji turi be galo daug sprendinių.

Sistemos sprendiniai: $x \in (-\infty; -2]$

2) $\begin{cases} -2 < x \leqslant 3, \\ -(x-3) > x+2; \end{cases}$ $\begin{cases} -2 < x \leqslant 3, \\ -x+3 > x+2; \end{cases}$ $\begin{cases} -2 < x \leqslant 3, \\ x < \frac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x \in (-2; 3], \\ x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right). \end{cases}$

Šios sistemos sprendiniai: $x \in (-2; \frac{1}{2})$

3) $\begin{cases} x > 3, \\ x - 3 > x + 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 3, \\ 0 > 5. \end{cases}$

Ši sistema neturi sprendinių, nes nelygybė $0 > 5$ yra neteisinga.

Vadinasi, nelygybės $|x-3| > |x+2|$ sprendiniai yra intervalo $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ skaičiai. Didžiausias sveikasis šio intervalo skaičius yra 0.

*Atsakymas.* 0.

**6c.** $\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right| \geqslant 1.$

Abi nelygybės pusės teigiamos, todėl *galime* kelti kvadratu:

$$\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right)^2 \geqslant 1, \quad \frac{(x^2-3x+2)^2}{(x^2+3x+2)^2} - 1 \geqslant 0,$$
$$\frac{(x^2-3x+2)^2-(x^2+3x+2)^2}{(x^2+3x+2)^2} \geqslant 0.$$

Skaitikliui taikome kvadratų skirtumo formulę:

$$(x^2-3x+2)^2-(x^2+3x+2)^2 =$$
$$= (x^2-3x+2+x^2+3x+2)(x^2-3x+2-x^2-3x-2) =$$
$$= (2x^2+4)\cdot(-6x) = -12x(x^2+2).$$

Vardiklio trinarį išskaidyti paprasta:

$$x^2+3x+2 = (x+1)(x+2).$$

Gavome nelygybę:

$$\frac{-12x(x^2+2)}{(x+1)^2(x+2)^2} \geqslant 0, \quad \frac{x(x^2+2)}{(x+1)^2(x+2)^2} \leqslant 0.$$

Reiškinys $x^2+2$ visada teigiamas. Vardiklio dauginamieji $(x+1)^2$, $(x+2)^2$ visada teigiami, išskyrus reikšmes, su kuriomis jie lygūs 0, t. y. $x=-1$ ir $x=-2$.
Taigi trupmenos

$$\frac{x(x^2+2)}{(x+1)^2(x+2)^2}$$

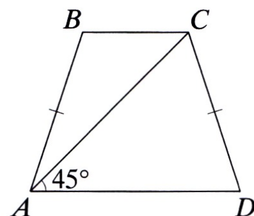
ženklas priklauso nuo $x$ ženklo. Nelygybės sprendiniai:

$-2 \quad -1 \quad 0 \quad x$

$(-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 0].$

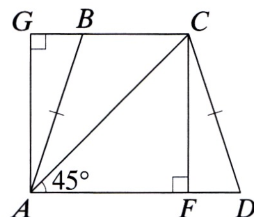
*Atsakymas.* $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 0].$

**7.** Lygiašonės trapecijos įstrižainės ilgis yra 16. Ji su ilgesniuoju pagrindu sudaro $45^\circ$ kampą. Apskaičiuokite trapecijos plotą.

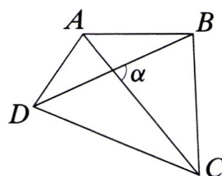



*Duota*: $ABCD$ — trapecija, $AB = CD$,
$\angle CAD = 45^\circ$, $AC = 16$.
*Rasti*: $S_{ABCD}$.

*Sprendimas.*
***I būdas.***
Nuleiskime iš $A$ statmenį $AG$ į $CB$ tęsinį, o iš $C$ — statmenį $CF$ į $AD$. $\triangle AGB = \triangle CFD$, todėl $S_{ABCD} = S_{AGCF}$. Bet $CF = AF$, nes $\triangle ACF$ status lygiašonis ($\angle A = 45^\circ$, $\angle F = 90^\circ$, $\angle C = 45^\circ$). Todėl $AGCF$ — kvadratas, kurio įstrižainė 16. Vadinasi, jo plotas 128.

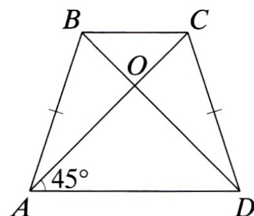



Iškilojo keturkampio plotas lygus įstrižainių ilgių sandaugos pusei padaugintai iš sinuso kampo tarp įstrižainių.




$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin\alpha$$

***II būdas.*** Išveskime kitą įstrižainę $BD$, įstrižainių susikirtimo tašką pažymėkime $O$. Įrodykime, kad $BD = AC$ ir $\angle BDA = 45^\circ$ (nors tai beveik akivaizdu, bet geriau įrodyti — tai paprasta).




Lygiašonės trapecijos kampai prie pagrindų yra lygūs: $\angle ABC = \angle BCD$, $\angle BAD = \angle CDA$.
Trikampiai $ABC$ ir $DBC$ lygūs pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų ($\angle B = \angle C$, $AB = CD$, $BC$ — bendra). Vadinasi, $AC = DB$. Taip pat ir $\angle BDC = \angle BAC$, o $\angle BDA = \angle CAD = 45^\circ$.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin\angle AOD.$$
$$\angle AOD = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ.$$
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 16 \cdot \sin 90^\circ = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 16 \cdot 1 = 128.$$

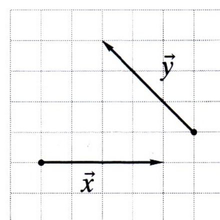
*Atsakymas.* 128.

# Vektoriai ir jų veiksmai

**K6 (6.1–6.4)**

**1.** Stačiakampio $KLMN$ kraštinėse pažymėkite visus nenulinius vektorius, kurių pradžios ir galo taškai yra stačiakampio viršūnės. Užrašykite:
a) kolinearių vektorių poras;
b) priešpriešių vektorių poras;
c) lygių vektorių poras.

**2.** Nubraižykite nekolinearius vektorius $\vec{x}$ ir $\vec{y}$ taip, kaip parodyta brėžinyje.
Nubrėžkite vektorių:
a) $\vec{d} = \frac{1}{3}\vec{y} + \vec{x}$ (pagal trikampio taisyklę);
b) $\vec{b} = \vec{x} + \frac{2}{3}\vec{y}$ (pagal lygiagretainio taisyklę);
c) $\vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{x} - 1\frac{1}{3}\vec{y})$.

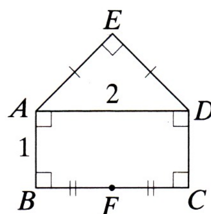



**3.** Trikampio $ABC$ pusiaukraštinės $AA_1$, $BB_1$ ir $CC_1$ kertasi taške $M$. Raskite tokį $k$, kad būtų teisinga lygybė:
a) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{MA_1}$; b) $\overrightarrow{A_1C} = k\overrightarrow{BC}$; c) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{AA_1}$.

**4.** a) Lygiagretainio $ABCD$ įstrižainės kertasi taške $M$. Vektorius $\overrightarrow{MA}$ ir $\overrightarrow{MB}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ir $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.
b) Taškas $M$ yra lygiagretainio $ABCD$ kraštinėje $BC$, $BM : MC = 3 : 1$. Vektorius $\overrightarrow{AM}$ ir $\overrightarrow{MD}$ išreikškite vektoriais $\vec{a} = \overrightarrow{AD}$ ir $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ .
c) Trapecijos $ABCD$ pagrindas $AD$ trigubai ilgesnis už pagrindą $BC$. Kraštinėje $AD$ pažymėtas toks taškas $K$, kad $AK = \frac{1}{3}AD$. Vektorius $\overrightarrow{CK}$, $\overrightarrow{KD}$ ir $\overrightarrow{BC}$ išreikškite vektoriais $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ ir $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$.

**5.** Lygiagretainio $ABCD$ įstrižainės susikerta taške $M$. Suprastinkite reiškinį:
a) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{DC}$;
b) $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}$;
c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{BD}$.

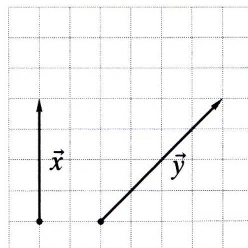
**6.** Raskite ilgį vektoriaus:
a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$;
b) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DE}$;
c) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{ED}) + \overrightarrow{AB}$.




**7.** Lygiakraščio trikampio $ABC$ kraštinės ilgis yra 4. Taškas $K$ yra kraštinės $AC$ vidurio taškas. Raskite:
a) $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$; b) $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}|$; c) $|\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB}|$.

**1.** Lygiagretainio $ABCD$ kraštinėse pažymėkite visus nenulinius vektorius, kurių pradžios ir galo taškai yra lygiagretainio viršūnės. Užrašykite:
a) kolinearių vektorių poras;
b) vienakrypčių vektorių poras;
c) lygių vektorių poras.

**2.** Nubraižykite nekolinearius vektorius $\vec{x}$ ir $\vec{y}$ taip, kaip parodyta brėžinyje.
Nubrėžkite vektorių:
a) $\vec{a} = \vec{y} + \frac{1}{4}\vec{x}$ (pagal trikampio taisyklę);
b) $\vec{b} = 1\frac{1}{2}\vec{x} + 2\vec{y}$ (pagal lygiagretainio taisyklę);
c) $\vec{c} = 2(\vec{x} - \frac{3}{2}\vec{y})$.

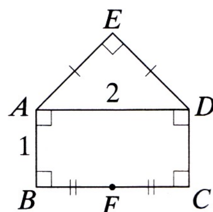



**3.** Trikampio $ABC$ pusiaukraštinės $AA_1$, $BB_1$ ir $CC_1$ kertasi taške $M$. Raskite tokį $k$, kad būtų teisinga lygybė:
a) $\overrightarrow{C_1B} = k\overrightarrow{C_1A}$; b) $\overrightarrow{CC_1} = k\overrightarrow{C_1M}$; c) $\overrightarrow{MB_1} = k\overrightarrow{B_1B}$.

**4.** a) Lygiagretainio $ABCD$ įstrižainės kertasi taške $M$. Vektorius $\overrightarrow{MC}$ ir $\overrightarrow{MD}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ir $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.
b) Vektorius $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ ir $\overrightarrow{CP}$, sutampančius su $\triangle ABC$ pusiaukraštinėmis, išreikškite vektoriais $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ir $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$.
c) Trikampio $ABC$ kraštinėje $BC$ pažymėtas toks taškas $N$, kad $BN = 2NC$, o kraštinėje $AC$ — jos vidurio taškas $P$. Vektorius $\overrightarrow{AN}$ ir $\overrightarrow{NP}$ išreikškite vektoriais $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ ir $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$.

**5.** Suprastinkite šiuos vektorinius reiškinius:
a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AN}$;
b) $\overrightarrow{MT} - \overrightarrow{KE} - \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AT} - \overrightarrow{AE}$;
c) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{DK}$.

**6.** Raskite ilgį vektoriaus:
a) $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA}$;
b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$;
c) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{ED}) + \overrightarrow{DC}$.

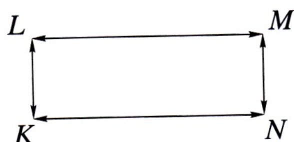



**7.** Lygiakraščio trikampio $ABC$ kraštinės ilgis yra 6. Taškas $K$ yra atkarpos $AC$ vidurio taškas. Raskite:
a) $|\overrightarrow{KA}| + |\overrightarrow{AB}|$; b) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$; c) $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}|$.

# Vektoriai ir jų veiksmai

**K6 (6.1–6.4)**

**1.** Vektoriai, esantys lygiagrečiose tiesėse arba vienoje tiesėje, vadinami kolineariaisiais.
Priešingų krypčių kolinearieji vektoriai vadinami priešpriešiais vektoriais.
Vienakrypčiai vektoriai, kurių ilgiai lygūs, vadinami lygiais.

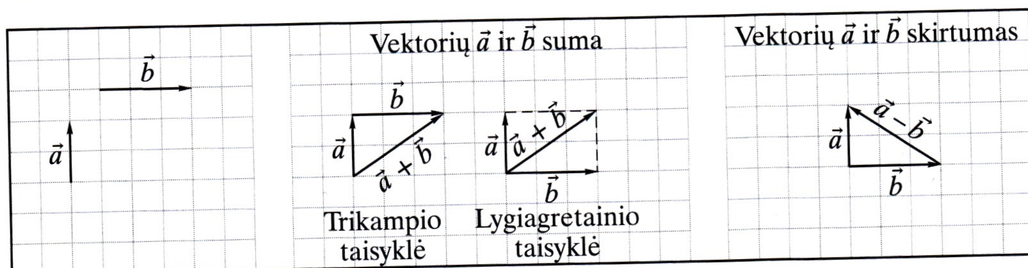



**1a.** $\overrightarrow{LM}$ ir $\overrightarrow{ML}$, $\overrightarrow{MN}$ ir $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{NK}$ ir $\overrightarrow{KN}$, $\overrightarrow{KL}$ ir $\overrightarrow{LK}$, $\overrightarrow{LM}$ ir $\overrightarrow{KN}$, $\overrightarrow{LM}$ ir $\overrightarrow{NK}$, $\overrightarrow{ML}$ ir $\overrightarrow{KN}$, $\overrightarrow{ML}$ ir $\overrightarrow{NK}$, $\overrightarrow{LK}$ ir $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{LK}$ ir $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{KL}$ ir $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{KL}$ ir $\overrightarrow{NM}$.

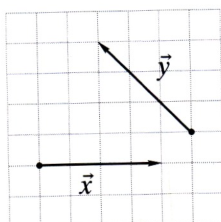
**1b.** $\overrightarrow{LK}$ ir $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{KL}$ ir $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{LM}$ ir $\overrightarrow{NK}$, $\overrightarrow{ML}$ ir $\overrightarrow{KN}$, $\overrightarrow{LM}$ ir $\overrightarrow{ML}$, $\overrightarrow{KL}$ ir $\overrightarrow{LK}$, $\overrightarrow{KN}$ ir $\overrightarrow{NK}$, $\overrightarrow{MN}$ ir $\overrightarrow{NM}$.

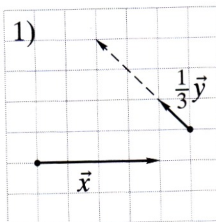
**1c.** $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{KN}$, $\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{NK}$, $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$.

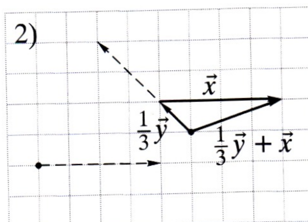
**2.**

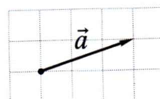



**2a.** 1) Padaliję vektoriaus $\vec{y}$ atkarpą į 3 lygias dalis randame vektorių $\frac{1}{3}\vec{y}$ (žr. 1) pav.).
2) Vektorių $\vec{x}$ atidedame nuo vektoriaus $\frac{1}{3}\vec{y}$ *galo* ir randame vektorių $\frac{1}{3}\vec{y}+\vec{x}$ (žr. 2) pav.).



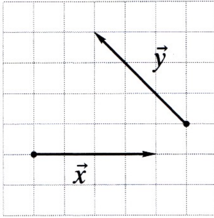



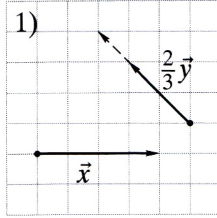



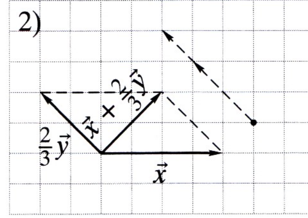

*Atsakymas.* 

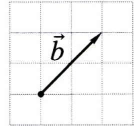
**2b.** 1) Randame vektorių $\frac{2}{3}\vec{y}$ (žr. 1) pav.).

2) Nuo vektoriaus $\vec{x}$ *pradžios* atidėję vektorių $\frac{2}{3}\vec{y}$ randame vektorių $\vec{x}+\frac{2}{3}\vec{y}$ (žr. 2) pav.).



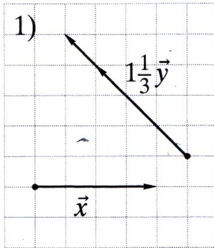



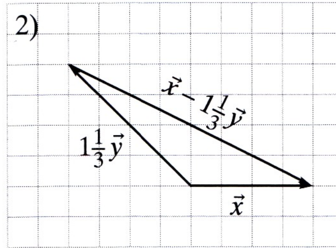

*Atsakymas.* 

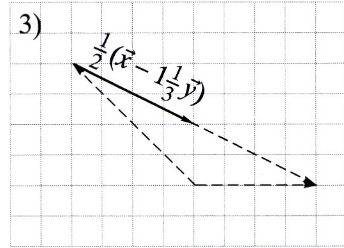

**2c.** 1) Randame vektorių $1\frac{1}{3}\vec{y}$ (žr. 1) pav.).

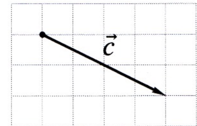
2) Randame vektorių $\vec{x}$ ir $1\frac{1}{3}\vec{y}$ skirtumą (žr. 2) pav.).

3) Randame vektorių $\frac{1}{2}\left(\vec{x}-1\frac{1}{3}\vec{y}\right)$ (žr. 3) pav.).

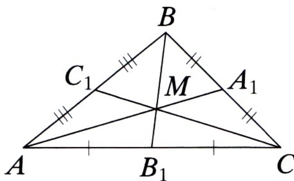



*Atsakymas.* 


**3.**




**3a.** $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{MA_1}$.

Vektoriai $\overrightarrow{AM}$ ir $k\overrightarrow{MA_1}$ yra vienakrypčiai, todėl koeficientas $k$ — teigiamas. Trikampio pusiaukraštinės kertasi viename taške ir dalija viena kitą santykiu 2 : 1 einant nuo trikampio viršūnės, todėl $k=\frac{AM}{MA_1}=2$, taigi $k=2$.

Vadinasi, teisinga lygybė $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MA_1}$.

*Atsakymas.* $k=2$.

**3b.** $\overrightarrow{A_1C} = k\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{A_1C} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$, todėl $k$ — teigiamas. $A_1$ — atkarpos $BC$ vidurio taškas, todėl $k = \frac{A_1C}{BC} = \frac{1}{2}$. Taigi $k = \frac{1}{2}$. Vadinasi, teisinga lygybė $\overrightarrow{A_1C} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

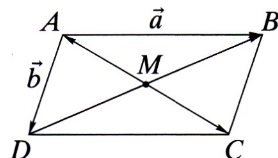
*Atsakymas.* $k = \frac{1}{2}$.

**3c.** $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{AA_1}$.

$\overrightarrow{MA} \uparrow\downarrow AA_1$, koeficientas $k$ — neigiamas, $|k| = \frac{MA}{AA_1} = \frac{2}{3}$, taigi $k = -\frac{2}{3}$. Vadinasi, teisinga lygybė $\overrightarrow{MA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$.

*Atsakymas.* $k = -\frac{2}{3}$.

**4a.** Lygiagretainio $ABCD$ įstrižainės kertasi taške $M$. Vektorius $\overrightarrow{MA}$ ir $\overrightarrow{MB}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ir $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.




*Sprendimas.* Ieškomuosius vektorius išsireiškiame jiems kolineariais įstrižainių vektoriais, o šiuos rasti paprasta.

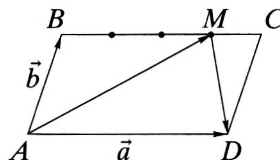
$$\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}; \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \vec{b} + \vec{a}, \quad \overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}).$$

$$\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}, \quad \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \vec{a} - \vec{b}, \quad \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}).$$

*Atsakymas.* $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$.

**4b.** Taškas $M$ yra lygiagretainio $ABCD$ kraštinėje $BC$, $BM : MC = 3 : 1$. Vektorius $\overrightarrow{AM}$ ir $\overrightarrow{MD}$ išreikškite vektoriais $\vec{a} = \overrightarrow{AD}$ ir $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$.

*Sprendimas.* Kraštinę $BC$ padaliję į 4 lygias dalis pažymime tašką $M$.




Vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ išreikškime vektorių $\overrightarrow{AM}$:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{b} + \overrightarrow{BM} \quad \text{(trikampio taisyklė)},$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{a} \quad \text{(vienodo ilgio ir vienos krypties)},$$

$$\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} = \frac{3}{4}\vec{a},$$

$$\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \frac{3}{4}\vec{a}.$$

Vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ išreikškime vektorių $\overrightarrow{MD}$.

$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} \quad \text{(trikampio taisyklė).}$$

Kadangi $\overrightarrow{AB} \downarrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, tai $\overrightarrow{CD} = -\vec{b}$.

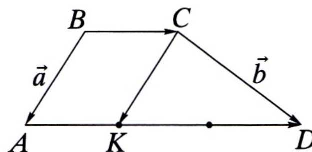
$$\overrightarrow{MC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}\vec{a}.$$

Vadinasi,

$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} = \frac{1}{4}\vec{a} - \vec{b}.$$

*Atsakymas.* $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \frac{3}{4}\vec{a}$, $\overrightarrow{MD} = \frac{1}{4}\vec{a} - \vec{b}$.

**4c.** Trapecijos $ABCD$ pagrindas $AD$ trigubai ilgesnis už pagrindą $BC$. Kraštinėje $AD$ pažymėtas toks taškas $K$, kad $AK = \frac{1}{3}AD$. Vektorius $\overrightarrow{CK}$, $\overrightarrow{KD}$ ir $\overrightarrow{BC}$ išreikškite vektoriais $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ ir $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$.




*Sprendimas.* Kraštinę $AD$ padaliję į tris lygias dalis pažymime tašką $K$.

Vektorių $\overrightarrow{CK}$ išreikškime vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$.

Keturkampis $ABCK$ — lygiagretainis, nes $AK \parallel BC$ ir $AK = \frac{1}{3}AD = BC$. Vadinasi, $AB = CK$.

Kadangi $\overrightarrow{BA} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CK}$, tai $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{BA} = \vec{a}$.

Vektorių $\overrightarrow{KD}$ išreikškime vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$:

$$\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CK} = \vec{b} - \vec{a}.$$

Vektorių $\overrightarrow{BC}$ išreikškime vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$.

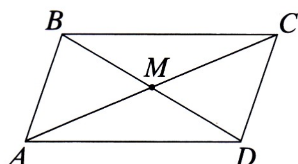
Vektoriai $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{AK}$ yra vienakrypčiai ir vienodo ilgio: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AK}$.

Kadangi $AK = \frac{1}{2}KD$ (duota), $\overrightarrow{AK} \uparrow\uparrow \overrightarrow{KD}$, tai

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{KD} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}).$$

*Atsakymas.* $\overrightarrow{CK} = \vec{a}$, $\overrightarrow{KD} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$.

**5.**




**5a.** $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{DC}$.

Galima samprotauti, pavyzdžiui, taip. Remdamiesi brėžiniu randame:

1) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$;

2) $-\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{MD} = -(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MD}) = -\overrightarrow{BD}$;

3) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}$.

Vadinasi,

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{DC} = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DC}\right) - \left(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MD}\right) = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}.$$

*Atsakymas.* $\overrightarrow{AB}$.

**5b.** $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}$.

Galima skaičiuoti taip:

$(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

*Atsakymas.* $\vec{0}$.

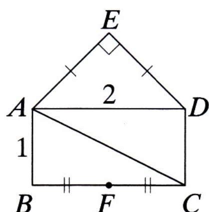
**5c.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{BD}$.

Galima skaičiuoti taip:

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - \overrightarrow{MC} + (\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB}) =$$
$$= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}) + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}.$$

*Atsakymas.* $\overrightarrow{AB}$.

**6.**




**6a.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Rasime $\overrightarrow{AC}$ ilgį. $AC$ — stačiakampio $ABCD$ įstrižainė, $\triangle ABC$ — status. Pagal Pitagoro teoremą: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{5}$.

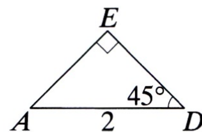
*Atsakymas.* $\sqrt{5}$.

**6b.** $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EA}$.

***I būdas.*** Trikampis $AED$ — status lygiašonis. Tegul $AE = ED = x$. Taikome Pitagoro teoremą: $x^2 + x^2 = 2^2$, $2x^2 = 4$, $x^2 = 2$, $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$ (atkarpos ilgis negali būti neigiamas); $AE = \sqrt{2}$, $|\overrightarrow{EA}| = \sqrt{2}$.

***II būdas.***

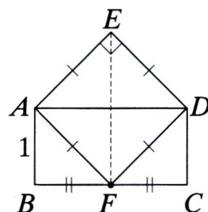
$\triangle AED$ — status lygiašonis,
todėl $\angle EAD = \angle EDA = 45°$.
$AE = AD \sin\angle ADE = 2\sin 45° = \sqrt{2}$.




*Atsakymas.* $\sqrt{2}$.

**6c.** $\frac{1}{2}(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{ED}) + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$.

Kadangi $\overrightarrow{AB}$ ilgis lygus 1, tai $2\overrightarrow{AB}$ ilgis lygus 2.



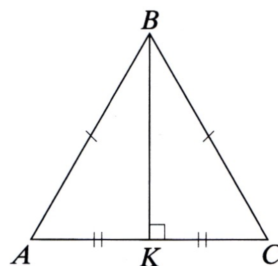

*Atsakymas.* 2.

**7.** *Duota*: $AB = BC = CA = 4$, $AK = KC$.

*Rasti*: a) $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$;

b) $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}|$;

c) $|\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB}|$.




**7a.** $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = 4 + 4 = 8$.

*Atsakymas.* 8.

**7b.** $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$, $|\overrightarrow{CA}| = 4$.

*Atsakymas.* 4.

**7c.** $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KB}$.

$KB$ — $\triangle ABC$ pusiaukraštinė, taigi ir aukštinė. Iš stačiojo trikampio $BKC$ $BK = BC \sin C = 4\sin 60° = 2\sqrt{3}$.

*Atsakymas.* $2\sqrt{3}$.

# Vektoriaus koordinatės. Vektorių skaliarinė daugyba

**K7 (7.1, 7.2, 8.1, 8.2)**

**1.** Raskite vektoriaus $\vec{a} = 2\vec{x} - \vec{y}$ koordinates ir ilgį, kai:
a) $\vec{x}(5;\ 1)$, $\vec{y}(-5;\ -4)$;
b) $\vec{x} = -\vec{i} - 4\vec{j}$, $\vec{y} = 5\vec{i} - 2\vec{j}$;
c) $\vec{x}\left(-3\frac{1}{4};\ -4\frac{2}{7}\right)$, $\vec{y}\left(-6\frac{1}{2};\ -5\frac{3}{7}\right)$.

**2.** Ar kolinearūs vektoriai:
a) $\vec{a}(1;\ -3)$ ir $\vec{b}(-3;\ 1)$?
b) $\vec{m}\left(2;\ -\frac{4}{3}\right)$ ir $\vec{n}\left(1;\ -\frac{2}{3}\right)$?
c) $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{BD}$, kai $A(-2;\ -1)$, $B(4;\ -3)$, $C(-1;\ 15)$, $D(-4;\ -1)$?

**3.** Su kuria $x$ reikšme statmeni yra vektoriai:
a) $\vec{m}(3x;\ -6)$ ir $\vec{n}(-2;\ 3)$?
b) $\vec{a}(1\frac{1}{3} - x;\ x)$ ir $\vec{b}(-3;\ 5 + 5x)$?
c) $\vec{a}(6;\ 3)$ ir $\overrightarrow{BD}$, kai $B(4;\ x + 1)$ ir $D(3x;\ 1)$?

**4.** Apskaičiuokite vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skaliarinę sandaugą, kai:
a) $\vec{a}(2{,}3;\ -1{,}4)$, $\vec{b}(-2;\ 2)$;
b) $\vec{a} = 4\vec{i} - 7\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j} - 2\vec{i}$;
c) $|\vec{a}| = 1{,}3$, $|\vec{b}| = 0{,}2$, $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 150^\circ$.

**5.** a) Taškai $A(-4;\ 7)$ ir $B(2;\ -1)$ yra apskritimo skersmens galai. Raskite apskritimo centro $O$ koordinates.
b) Raskite $\triangle ABC$ pusiaukraštinės $AM$ ilgį, jei $A(1;\ 2)$, $B(6;\ 3)$, $C(-2;\ 5)$.

**6.** Raskite kampo tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ kosinusą, jei:
a) $|\vec{a}| = \frac{1}{2}$, $|\vec{b}| = 4$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{2}$;
b) $\vec{a}(-4;\ 0)$, $\vec{b}(3;\ -5)$;
c) $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$, o vektoriai $\vec{m} = 2\vec{a} + \vec{b}$ ir $\vec{n} = \vec{a} - 3\vec{b}$ yra statmeni.

# Vektoriaus koordinatės. Vektorių skaliarinė daugyba

2 variantas

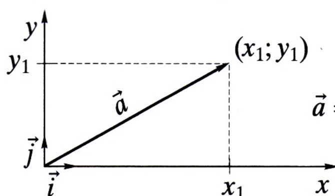
K7 (7.1, 7.2, 8.1, 8.2)

1. Raskite vektoriaus $\vec{m} = -2\vec{a} + \vec{b}$ koordinates ir ilgį, kai:
   a) $\vec{a}(2; -4)$, $\vec{b}(-3; 1)$;
   b) $\vec{a} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$, $\vec{b} = 4\vec{i} - \vec{j}$;
   c) $\vec{a}\left(-1\frac{1}{3}; \frac{5}{7}\right)$, $\vec{b}\left(-2\frac{2}{3}; 1\frac{1}{7}\right)$.
2. Ar kolinearūs vektoriai:
   a) $\vec{a}(1; 3)$ ir $\vec{b}(-1; -3)$?
   b) $\vec{m}(-3; 1)$ ir $\vec{n}\left(1; \frac{1}{3}\right)$?
   c) $\overrightarrow{CD}$ ir $\overrightarrow{MN}$, kai $C(-3; 2)$, $D(1; -4)$, $M(1; 2)$, $N(-1; 5)$?
3. Su kuria $y$ reikšme statmeni yra vektoriai:
   a) $\vec{m}(-4; 2)$ ir $\vec{n}(2; y)$?
   b) $\vec{a}(y + 2; y)$ ir $\vec{b}(4; 3 - y)$?
   c) $\vec{a}(10; 4)$ ir $\overrightarrow{AC}$, kai $A(2; y)$ ir $C(y - 1; 4)$?
4. Apskaičiuokite vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skaliarinę sandaugą, kai:
   a) $\vec{a}(4{,}3; -2{,}2)$, $\vec{b}(-0{,}4; 5)$;
   b) $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$;
   c) $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 0{,}4$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 135°$.
5. a) Taškai $A(-3; 2)$ ir $B(-5; 6)$ yra apskritimo skersmens galai. Raskite apskritimo centro $O$ koordinates.
   b) Raskite $\triangle ABC$ pusiaukraštinės $CK$ ilgį, jei $A(0; 2)$, $B(-4; 6)$, $C(-5; 2)$.
6. Raskite kampo tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ kosinusą, jei:
   a) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$;
   b) $\vec{a}(-4; 4)$, $\vec{b}(-3; 4)$;
   c) $(\vec{a} - \vec{b})^2 + (2\vec{a} - \vec{b})^2 = 56$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$.

# Vektoriaus koordinatės. Vektorių skaliarinė daugyba

**K7 (7.1, 7.2, 8.1, 8.2)**

**1.**




$\vec{a} = (x_1; y_1) = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$, $\vec{i}\,(1; 0), \vec{j}\,(0; 1)$.

$\vec{a}(x_1; y_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2)$; $k\vec{a} = (kx_1; ky_1)$,
$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$, $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$,
$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

**1a.** $\vec{a} = 2\vec{x} - \vec{y}$, $\vec{x}(5; 1)$, $\vec{y}(-5; -4)$.
Randame vektoriaus $2\vec{x}$ koordinates:

$$2\vec{x}(2 \cdot 5; 2 \cdot 1), \quad 2\vec{x}(10; 2).$$

Randame vektoriaus $\vec{a}$ koordinates:

$$\vec{a} = 2\vec{x} - \vec{y}, \quad \vec{a}\big(10 - (-5); 2 - (-4)\big), \quad \vec{a}(15; 6).$$

Randame $\vec{a}$ ilgį:

$$|\vec{a}| = \sqrt{15^2 + 6^2} = \sqrt{261} = \sqrt{29 \cdot 9} = 3\sqrt{29}.$$

*Atsakymas.* $\vec{a}(15; 6)$, $|\vec{a}| = 3\sqrt{29}$.

**1b.** $\vec{x} = -\vec{i} - 4\vec{j}$, $\vec{y} = 5\vec{i} - 2\vec{j}$.
Vektorių $\vec{x}$ ir $\vec{y}$ koordinatės: $\vec{x}(-1; -4)$, $\vec{y}(5; -2)$.

$$\vec{a} = 2\vec{x} - \vec{y}, \quad \vec{a}\big(2 \cdot (-1) - 5; 2 \cdot (-4) - (-2)\big), \quad \vec{a}(-7; -6);$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{(-7)^2 + (-6)^2} = \sqrt{49 + 36} = \sqrt{85}.$$

*Atsakymas.* $\vec{a}(-7; -6)$, $|\vec{a}| = \sqrt{85}$.

**1c.** $\vec{x}\big(-3\frac{1}{4}; -4\frac{2}{7}\big)$, $\vec{y}\big(-6\frac{1}{2}; -5\frac{3}{7}\big)$.

$$\vec{a} = 2\vec{x} - \vec{y}, \quad \vec{a}\left(2 \cdot \left(-3\frac{1}{4}\right) - \left(-6\frac{1}{2}\right);\ 2 \cdot \left(-4\frac{2}{7}\right) - \left(-5\frac{3}{7}\right)\right), \quad \vec{a}\left(0; -3\frac{1}{7}\right);$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{0^2 + \left(-3\frac{1}{7}\right)^2} = 3\frac{1}{7}.$$

*Atsakymas.* $\vec{a}\big(0; -3\frac{1}{7}\big)$, $|\vec{a}| = 3\frac{1}{7}$.

**2.** Vektoriai yra kolinearūs, jei atitinkamos jų koordinatės yra proporcingos.

**2a.** Ar kolinearūs vektoriai $\vec{a}(1; -3)$ ir $\vec{b}(-3; 1)$?

Kadangi $\frac{1}{-3} \neq \frac{-3}{1}$, tai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ nėra kolinearūs.

*Atsakymas.* Nekolinearūs.

**2b.** Ar kolinearūs vektoriai $\vec{m}\left(2; -\frac{4}{3}\right)$ ir $\vec{n}\left(1; -\frac{2}{3}\right)$?

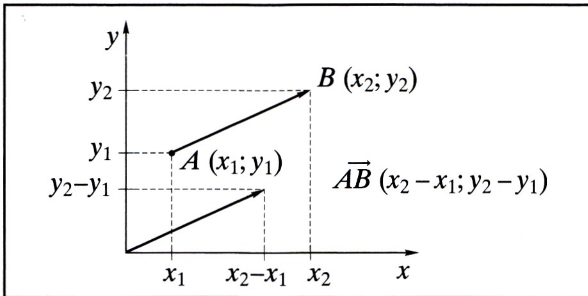
Kadangi lygybė

$$\frac{2}{1} = \frac{-\frac{4}{3}}{-\frac{2}{3}} \Rightarrow 2 = 2,$$

teisinga, tai vektoriai $\vec{m}$ ir $\vec{n}$ yra kolinearūs.

*Atsakymas.* Kolinearūs.

**2c.** Ar kolinearūs vektoriai $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{BD}$, kai $A(-2; -1)$, $B(4; -3)$, $C(-1; 15)$, $D(-4; -1)$?




Iš pradžių rasime vektorių $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{BD}$ koordinates. Iš pabaigos taško atitinkamų koordinačių atimame pradžios taško atitinkamas koordinates.

$$\overrightarrow{AC}\big(-1-(-2); 15-(-1)\big), \quad \overrightarrow{AC}(1; 16),$$
$$\overrightarrow{BD}\big(-4-4; -1-(-3)\big), \quad \overrightarrow{BD}(-8; 2).$$

Kadangi lygybė

$$\frac{1}{-8} = \frac{16}{2} \Rightarrow -\frac{1}{8} = 8$$

neteisinga, tai vektoriai $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{BD}$ nėra kolinearūs.

*Atsakymas.* Nekolinearūs.

**3.** Nenuliniai vektoriai statmeni tada ir tik tada, kai jų skaliarinė sandauga lygi 0. Dviejų vektorių skaliarinė sandauga lygi jų koordinačių sandaugų sumai.

**3a.** Su kuria $x$ reikšme statmeni yra vektoriai $\vec{m}(3x; -6)$ ir $\vec{n}(-2; 3)$?

Skaliarinę sandaugą prilyginame nuliui:

$$3x \cdot (-2) + (-6) \cdot 3 = 0, \quad -6x - 18 = 0, \quad x = -3.$$

*Atsakymas.* $x = -3$.

**3b.** Su kuria $x$ reikšme statmeni yra vektoriai $\vec{a}(1\frac{1}{3} - x; x)$ ir $\vec{b}(-3; 5 + 5x)$?

$$\left(1\frac{1}{3} - x\right) \cdot (-3) + x(5 + 5x) = 0,$$

$$-4 + 3x + 5x + 5x^2 = 0,$$

$$5x^2 + 8x - 4 = 0,$$

$$D = 8^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-4) = 64 + 80 = 144,$$

$$x_1 = \frac{-8 + \sqrt{144}}{2 \cdot 5} = \frac{-8 + 12}{10} = \frac{4}{10} = 0{,}4,$$

$$x_2 = \frac{-8 - \sqrt{144}}{2 \cdot 5} = \frac{-8 - 12}{10} = \frac{-20}{10} = -2.$$

*Atsakymas.* $x = -2$, $x = 0{,}4$.

**3c.** Su kuria $x$ reikšme statmeni yra vektoriai $\vec{a}(6; 3)$ ir $\overrightarrow{BD}$, kai $B(4; x + 1)$ ir $D(3x; 1)$?

Randame vektoriaus $\overrightarrow{BD}$ koordinates:

$$\overrightarrow{BD}\big(3x - 4; 1 - (x + 1)\big), \quad \overrightarrow{BD}(3x - 4; 1 - x - 1),$$

$$\overrightarrow{BD}(3x - 4; -x).$$

Skaliarinę sandaugą prilyginame nuliui:

$$6 \cdot (3x - 4) + 3 \cdot (-x) = 0, \quad 18x - 24 - 3x = 0, \quad 15x = 24,$$

$$x = \frac{24}{15} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}.$$

*Atsakymas.* $x = 1\frac{3}{5}$.

**4.**

> $\vec{a}(x_1; y_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2)$.
> Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skaliarinė sandauga: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$.

**4a.** Apskaičiuokite vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skaliarinę sandaugą, kai $\vec{a}(2{,}3; -1{,}4)$, $\vec{b}(-2; 2)$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2{,}3 \cdot (-2) + (-1{,}4) \cdot 2 = -4{,}6 - 2{,}8 = -7{,}4.$$

*Atsakymas.* $-7{,}4$.

**4b.** Apskaičiuokite vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skaliarinę sandaugą, kai $\vec{a} = 4\vec{i} - 7\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j} - 2\vec{i}$.
Randame vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ koordinates:

$$\vec{a}(4; -7), \quad \vec{b}(-2; 1).$$

Vadinasi,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot (-2) + (-7) \cdot 1 = -8 - 7 = -15.$$

*Atsakymas.* $-15$.

**4c.** Apskaičiuokite vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skaliarinę sandaugą, kai $|\vec{a}| = 1{,}3$, $|\vec{b}| = 0{,}2$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 150°$.

> Kai žinome vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ ilgius bei kampo tarp jų didumą, tai skaliarinę sandaugą $\vec{a} \cdot \vec{b}$ randame pagal formulę:
> $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

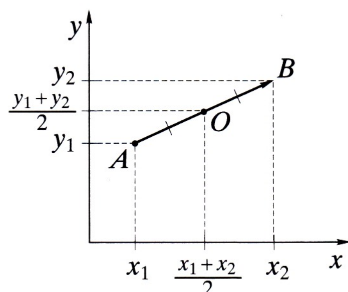
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) =$$
$$= 1{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot \cos 150° = 0{,}26 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -0{,}13\sqrt{3};$$
$$\cos 150° = \cos(90° + 60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(Arba: $\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.)

*Atsakymas.* $-0{,}13\sqrt{3}$.

**5.**

Atkarpos vidurio taško kiekviena koordinatė yra atkarpos galų atitinkamų koordinačių aritmetinis vidurkis.




$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2),$
$O\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right).$

Atkarpos $AB$ ilgis: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

**5a.** Taškai $A(-4; 7)$ ir $B(2; -1)$ yra apskritimo skersmens galai. Raskite apskritimo centro $O$ koordinates.

Apskritimo centro koordinatės yra jo skersmens vidurio taško koordinatės.

$$O\left(\frac{-4+2}{2}; \frac{7+(-1)}{2}\right), \quad O(-1; 3).$$

*Atsakymas.* $O(-1; 3)$.

**5b.** Raskite $\triangle ABC$ pusiaukraštinės $AM$ ilgį, jei $A(1; 2)$, $B(6; 3)$, $C(-2; 5)$.

Randame atkarpos $BC$ vidurio taško $M$ koordinates:

$$M\left(\frac{6+(-2)}{2}; \frac{3+5}{2}\right), \quad M(2; 4).$$

Atkarpos $AM$ ilgį randame pagal atstumo tarp dviejų taškų formulę:

$$AM = \sqrt{(2-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

*Atsakymas.* $AM = \sqrt{5}$.

**6a.** Raskite kampo tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ kosinusą, jei $|\vec{a}| = \frac{1}{2}$, $|\vec{b}| = 4$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{2}$.

Kampą tarp $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ pažymėkime $\gamma$.
Taikome skaliarinės sandaugos formulę $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\gamma$:

$$\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \cos\gamma, \quad \sqrt{2} = 2\cos\gamma, \quad \cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

*Atsakymas.* $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**6b.** Raskite kampo tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ kosinusą, jei: $\vec{a}(-4; 0)$, $\vec{b}(3; -5)$.

Taikome formulę $\cos\alpha = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$:

$$\cos\gamma = \frac{-4\cdot 3 + 0\cdot(-5)}{\sqrt{(-4)^2+0^2}\cdot\sqrt{3^2+(-5)^2}} = \frac{-12}{\sqrt{16}\cdot\sqrt{34}} =$$
$$= \frac{-12}{4\cdot\sqrt{34}} = -\frac{3}{\sqrt{34}}\cdot\frac{\sqrt{34}}{\sqrt{34}} = -\frac{3\sqrt{34}}{34}.$$

*Atsakymas.* $-\frac{3\sqrt{34}}{34}$.

**6c.** Raskite kampo tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ kosinusą, jei $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$, o vektoriai $\vec{m} = 2\vec{a} + \vec{b}$ ir $\vec{n} = \vec{a} - 3\vec{b}$ yra statmeni.

Kadangi $m \perp n$, tai $\vec{m}\cdot\vec{n} = 0$. Vadinasi,

$$(2\vec{a} + b)(\vec{a} - 3\vec{b}) = 0,$$
$$2\vec{a}^2 - 6\vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{b} - 3\vec{b}^2 = 0,$$
$$2\vec{a}^2 - 5\vec{a}\vec{b} - 3\vec{b}^2 = 0.$$

Taikome savybę $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ ir skaliarinės sandaugos formulę:

$$2|\vec{a}|^2 - 5|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\gamma - 3|\vec{b}|^2 = 0.$$

Kadangi $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ (duota sąlygoje), tai

$$2(2|\vec{b}|)^2 - 5(2|\vec{b}|)|\vec{b}|\cos\gamma - 3|\vec{b}|^2 = 0,$$
$$8|\vec{b}|^2 - 10|\vec{b}|^2\cos\gamma - 3|\vec{b}|^2 = 0,$$
$$-10|\vec{b}|^2\cos\gamma = -5|\vec{b}|^2.$$

Abi puses dalijame iš $-5|\vec{b}|^2$:

$$2\cos\gamma = 1, \quad \cos\gamma = \frac{1}{2}.$$

*Atsakymas.* $\frac{1}{2}$.

# Funkcijos sąvoka

**K8 (10.1–10.3)**

**1.** a) Duota funkcija $f(x) = -x^2 + x - 3$.

1) Apskaičiuokite $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(\sqrt{3})$, $f\left(\frac{a+1}{a-1}\right)$.
2) Nubraižykite funkcijos $f(x)$ grafiką.
3) Užrašykite funkcijos $f(x)$ apibrėžimo ir reikšmių sritis bei didėjimo ir mažėjimo intervalus.

b) Duota funkcija $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, x \geqslant 0, \\ x - 1, x < 0. \end{cases}$

1) Apskaičiuokite $f(0)$, $f\left(4\frac{2}{3}\right)$, $f\left(-8\frac{4}{5}\right)$.
2) Nubraižykite funkcijos $f(x)$ grafiką.
3) Užrašykite funkcijos $f(x)$ apibrėžimo ir reikšmių sritis bei didėjimo ir mažėjimo intervalus.

**2.** a) Užrašykite užtušuotos dalies ploto $S$ priklausomybę nuo kvadrato kraštinės ilgio $x$.

x
x
S

b) Ritinio formos strypo ilgis 25 cm, o skerspjūvio plotas lygus 1 cm$^2$. Strypas sulituotas iš dviejų dalių: 10 cm ilgio kairiosios strypo dalies tankis yra $7{,}8\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, o 15 cm ilgio dešiniosios dalies — $8{,}9\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. Nuo kairiojo strypo galo atpjautas $x$ cm ilgio gabalas. Parašykite atpjauto gabalo masės $m$ (gramais) priklausomybę nuo $x$.

**3.** Su kuriomis kintamojo $x$ reikšmėmis duotoji funkcija neapibrėžta:

a) $y = \sqrt{2 - x^2}$? b) $y = \sqrt{\frac{x-1}{x-3}}$? c) $y = \frac{3}{|x|-2}$?

**4.** Raskite funkcijos atvirkštinę funkciją, užrašykite atvirkštinės funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sritis.

a) $y = 2x + 1$; b) $y = \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$;
c) $y = x^2 - 4x + 4$, kai $x \leqslant 2$.

**5.** Apskaičiuokite.

a) $[2, 6] + [-3{,}4] - [3{,}1]$;
b) $[3, 3] + \{-3{,}3\} + \{6{,}1\}$;
c) $\left\{-\frac{1}{4}\right\} + \left\{-2\frac{1}{2}\right\} - \left\{-2\frac{3}{4}\right\}$.

**6.** a) Funkcija apibrėžta formule $f(x) = kx + \frac{1}{2}$. Raskite $k$, jei $f(1) = 0$.

b) Funkcija apibrėžta formule $f(x) = ax + b$. Raskite $a$ ir $b$, jei $f(0) = -5$ ir $f(7) = 9$.

c) Apskaičiuokite funkcijos $f(x) = ax^2 + bx + c$ koeficientus $a$, $b$ ir $c$, jei $f(-3) = -8$, $f(0) = -2$, $f(3) = 10$.

**7.** Ritinio ašinio pjūvio įstrižainė lygi $4\sqrt{2}$ ir su pagrindo plokštuma sudaro $45^\circ$ kampą. Raskite ritinio tūrį.

**1.** a) Duota funkcija $f(x) = x^2 - 2x + 3$.
1) Apskaičiuokite $f(-0{,}2)$, $f(\sqrt{2})$, $f\left(\frac{a}{a-1}\right)$.
2) Nubraižykite funkcijos $f(x)$ grafiką.
3) Užrašykite funkcijos $f(x)$ apibrėžimo ir reikšmių sritis bei didėjimo ir mažėjimo intervalus.

b) Duota funkcija $g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \geqslant 0, \\ x + 1, & x < 0. \end{cases}$
1) Apskaičiuokite $g\left(-5\frac{3}{4}\right)$, $g(0)$, $g\left(2\frac{3}{4}\right)$.
2) Nubraižykite funkcijos $g(x)$ grafiką.
3) Užrašykite funkcijos $g(x)$ apibrėžimo ir reikšmių sritis bei didėjimo ir mažėjimo intervalus.

**2.** a) Užrašykite užtušuotos dalies ploto $S$ priklausomybę nuo trikampio kraštinės ilgio $x$.

x x x

b) Automobilis 20 sekundžių važiuoja 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ greičiu, o po to dar 50 sekundžių — 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ greičiu. Parašykite formulę, kaip kelias $s$ (kilometrais) priklausė nuo judėjimo laiko $t$ (sekundėmis).

**3.** Su kuriomis kintamojo $x$ reikšmėmis duotoji funkcija neapibrėžta:
a) $y = \sqrt{x^2 + 9}$? b) $y = \sqrt{\frac{1-x}{x+5}}$? c) $y = \frac{2x}{3|x|-4}$?

**4.** Raskite funkcijos atvirkštinę funkciją, užrašykite atvirkštinės funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sritis.
a) $y = -2x + 7$; b) $y = x^3$;
c) $y = x^2 + 2x + 1$, kai $x \leqslant -1$.

**5.** Apskaičiuokite.
a) $[1{,}7] + [3] + [-6{,}3]$;
b) $\{-2{,}2\} + [4{,}1] - \{6{,}3\}$;
c) $\left\{-3\frac{2}{3}\right\} + \left\{2\frac{1}{6}\right\} + \left\{-\frac{5}{6}\right\}$.

**6.** a) Funkcija apibrėžta formule $f(x) = 2x + b$. Raskite koeficiento $b$ reikšmę, jei žinoma, kad funkcijos grafikas eina per tašką, kurio koordinatės yra $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.
b) Funkcija apibrėžta formule $g(x) = ax + b$. Raskite $a$ ir $b$, jei $g(0) = 13$ ir $g(-3) = 4$.
c) Apskaičiuokite funkcijos $f(x) = ax^2 + bx + c$ koeficientus $a$, $b$, $c$, jei $f(-3) = -11$, $f(0) = 10$, $f(2) = -6$.

**7.** Ritinio ašinio pjūvio įstrižainė lygi $\sqrt{15}$ ir su sudaromąja sudaro 45° kampą. Raskite ritinio šoninio paviršiaus plotą.

**1a.** $f(x) = -x^2 + x - 3.$

1)

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 3 = -3 - \frac{1+2}{4} = -3\frac{3}{4};$$
$$f(\sqrt{3}) = -(\sqrt{3})^2 + \sqrt{3} - 3 = -3 + \sqrt{3} - 3 = -6 + \sqrt{3};$$
$$f\left(\frac{a+1}{a-1}\right) = -\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2 + \frac{a+1}{a-1} - 3 = \frac{-(a+1)^2}{(a-1)^2} + \frac{a+1}{a-1} - 3 =$$
$$= \frac{-(a+1)^2 + (a+1)(a-1)}{(a-1)^2} - 3 = \frac{-a^2 - 2a - 1 + a^2 - 1}{(a-1)^2} - 3 =$$
$$= \frac{-2a-2}{(a-1)^2} - 3 = \frac{-2a - 2 - 3(a^2 - 2a + 1)}{(a-1)^2} =$$
$$= \frac{-2a - 2 - 3a^2 + 6a - 3}{(a-1)^2} = \frac{-3a^2 + 4a - 5}{(a-1)^2}.$$

2) Funkcijos $f(x) = -x^2 + x - 3$ grafikas — parabolė. Randame parabolės viršūnės koordinates:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2\cdot(-1)} = \frac{1}{2},$$
$$y_0 = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 3 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 3 = -2\frac{3}{4}.$$

Viršūnės koordinatės $\left(\frac{1}{2}; -2\frac{3}{4}\right)$.

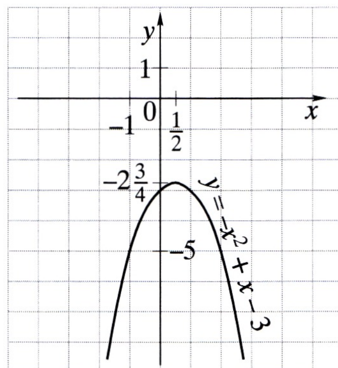
Randame taškus, kuriuose parabolė kerta $x$ ašį:

$$-x^2 + x - 3 = 0, \quad x^2 - x + 3 = 0,$$
$$D = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot 3 = 1 - 12 = -11 < 0.$$

Tai reiškia, kad parabolė $y = -x^2 + x - 3$ nekerta $x$ ašies. Kadangi kvadratinio trinario $-x^2 + x - 3$ koeficientas $a = -1 < 0$, tai parabolės šakos nukreiptos žemyn; kadangi $c = -3$, tai parabolė $y$ ašį kerta taške $(0; -3)$.

Sudarome funkcijos reikšmių lentelę ir braižome grafiką:

| $x$ | $-1$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-5$ | $-3$ | $-2\frac{3}{4}$ | $-3$ | $-5$ |




$f(-1) = -(-1)^2 - 1 - 3 = -5,$
$f(0) = -0^2 + 0 - 3 = -3.$

3) Apibrėžimo sritis $x \in (-\infty; +\infty)$, reikšmių sritis $y \in \left(-\infty; -2\frac{3}{4}\right]$. Funkcijos reikšmės didėja, kai $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$; funkcijos reikšmės mažėja, kai $x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

**1b.** $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, x \geqslant 0, \\ x - 1, x < 0. \end{cases}$

1)

$f(0) = 0^2 + 1 = 1$ (rėmėmės pirma eilute, nes 0 priklauso sričiai $x \geqslant 0$);
$f\left(4\frac{2}{3}\right) = \left(4\frac{2}{3}\right)^2 + 1 = \left(\frac{14}{3}\right)^2 + 1 = \frac{196}{9} + 1 = \frac{196+9}{9} = \frac{205}{9} = 22\frac{7}{9};$
$f\left(-8\frac{4}{5}\right) = -8\frac{4}{5} - 1 = -9\frac{4}{5}$ (rėmėmės antra eilute, nes $-8\frac{4}{5} < 0$).

2) Funkcijos grafiką sudarys parabolės $y = x^2 + 1$, kai $x \geqslant 0$, dalis ir tiesės $y = x - 1$, kai $x < 0$, dalis. Randame parabolės $y = x^2 + 1$ viršūnės koordinates — (0; 1). Sudarome lentelę:

| $x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 2 | 5 |

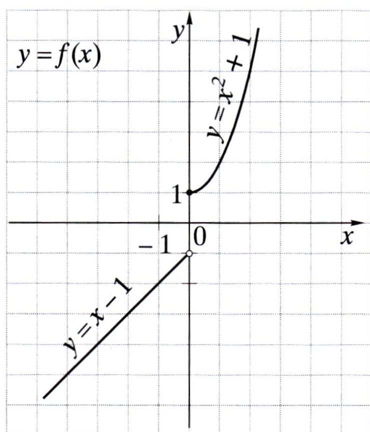
$f(1) = 1^2 + 1 = 2, \quad f(2) = 2^2 + 1 = 5.$

Tiesės daliai nubrėžti pasirenkame du taškus:

| $x$ | 0 | $-1$ |
|---|---|---|
| $y$ | $-1$ | $-2$ |

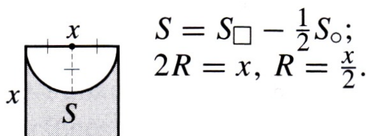
$f(0) = -1, \quad f(-1) = -1 - 1 = -2.$

Braižome grafiką:




3) Apibrėžimo sritis $x \in (-\infty; +\infty)$, reikšmių sritis $y \in (-\infty; -1) \cup [1; +\infty)$. Funkcija yra didėjanti visoje apibrėžimo srityje.

**2a.**

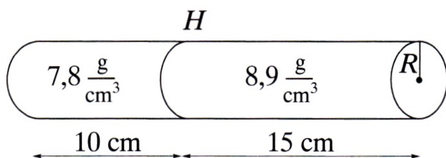



$S = S_{\square} - \frac{1}{2} S_{\circ}$;
$2R = x$, $R = \frac{x}{2}$.

$S_{\circ} = \pi R^2 = \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\pi x^2}{4}$, $\quad S_{\square} = x^2$.
Taigi $S = S_{\square} - \frac{1}{2} S_{\circ} = x^2 - \frac{\pi x^2}{8} = x^2\left(1 - \frac{\pi}{8}\right)$.

*Atsakymas.* $S(x) = x^2\left(1 - \frac{\pi}{8}\right)$.

**2b.**




$V_{\text{strypo}} = S_{\text{pagr.}} \cdot H = \pi R^2 \cdot H$,
$\pi R^2 = 1\ \text{cm}^2$.

> Medžiagos tankis $\left(\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ parodo, kiek gramų sveria vienas kubinis centimetras tos medžiagos.
> Jei kūno tūris yra $V$ kubinių centimetrų, o medžiagos, iš kurios tas kūnas padarytas, tankis yra $\rho$ gramų į kubinį centimetrą, tai to kūno masė
>
> $$m = V \cdot \rho \text{ (gramų)}.$$

Galimi du atvejai: $x \leqslant 10\,\text{cm}$, $x > 10\,\text{cm}$.
1) Jei atpjauto ritinio aukštinė $x$ yra ne ilgesnė už kairiosios dalies ilgį ($x \leqslant 10\,\text{cm}$), tai atpjauto ritinio medžiagos tankis yra $7{,}8\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

Apskaičiuojame atpjauto ritinio tūrį:

$$V = \pi R^2 \cdot x = 1 \cdot x = x \text{ (kubinių centimetrų).}$$

Apskaičiuojame atpjauto ritinio masę. Kadangi $1\,\text{cm}^3$ sveria 7,8 g, tai $x\,\text{cm}^3$ svers:

$$m = 7{,}8 \cdot x \text{ (gramų).}$$

2) Jei atpjauto ritinio aukštinė yra ilgesnė už kairiosios dalies ilgį ($x > 10$), tai atpjautas ritinys susidės iš dviejų dalių.
Kairiosios dalies tūris $V_1 = 1 \cdot 10 = 10\,(\text{cm}^3)$, o masė $m_1 = 7{,}8 \cdot 10 = 78\,(\text{g})$.
Dešiniosios atpjauto ritinio dalies aukštinė bus $(x - 10)$ centimetrų, tūris $V_2 = 1 \cdot (x - 10) = x - 10\,(\text{cm}^3)$, o masė $m_2 = 8{,}9 \cdot (x - 10) = 8{,}9x - 89\,(\text{g})$.
Vadinasi, visos atpjautos dalies masė $m$:

$$m = m_1 + m_2 = 78 + 8{,}9x - 89 = 8{,}9x - 11 \text{ (gramų).}$$

Lieka teisingai surašyti atsakymą.

*Atsakymas.* $m(x) = \left[\begin{array}{ll} 7{,}8x, & \text{kai } 0 < x \leqslant 10, \\ 8{,}9x - 11, & \text{kai } 10 < x \leqslant 25. \end{array}\right.$

**3a.** Funkcija $y = \sqrt{2 - x^2}$ neapibrėžta, kai po šaknimi esantis reiškinys yra neigiamas. Nelygybę $2 - x^2 < 0$ sprendžiame intervalų metodu:

$$2 - x^2 < 0, \quad \left(\sqrt{2}\right)^2 - x^2 < 0, \quad \left(\sqrt{2} - x\right)\left(\sqrt{2} + x\right) < 0.$$

Brėžiame skaičių tiesę ir nustatome dauginamųjų $\sqrt{2} - x$, $\sqrt{2} + x$ ir sandaugos $(\sqrt{2} - x) \cdot (\sqrt{2} + x)$ ženklus intervaluose:

| | $(-\infty; -\sqrt{2})$ | $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ | $(\sqrt{2}; +\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $\sqrt{2} - x$ | + | + | − |
| $\sqrt{2} + x$ | − | + | + |
| $(\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x)$ | − | + | − |

$-\sqrt{2}$
$\sqrt{2}$
$x$

*Atsakymas.* $x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

**3b.** Funkcija $y = \sqrt{\frac{x-1}{x-3}}$ neapibrėžta, kai pošaknis neigiamas arba neturi prasmės:

$$\frac{x - 1}{x - 3} < 0 \quad \text{ir} \quad x - 3 = 0.$$

Nelygybę sprendžiame intervalų metodu: $x-1=0$, $x=1$; $x-3=0$, $x=3$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $x-3$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $\frac{x-1}{x-3}$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $x$ | | 1 | 3 |

$x \in (1; 3)$

Prie nelygybės sprendinių intervalo dar prijungiame reikšmę $x=3$.

*Atsakymas.* $x \in (1; 3]$.

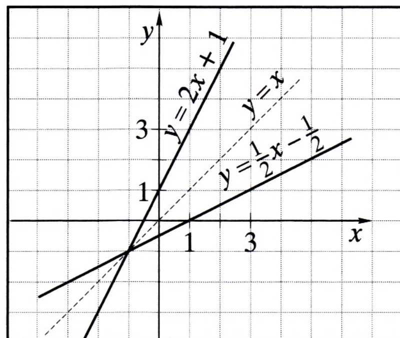
**3c.** Funkcija $y = \frac{3}{|x|-2}$ neapibrėžta, kai vardiklis lygus 0.

$$|x|-2=0, \quad |x|=2, \quad x_1=2, x_2=-2.$$

*Atsakymas.* $x=-2$ ir $x=2$.

**4a.** Funkcijos $y=2x+1$ apibrėžimo sritis $(-\infty; +\infty)$, reikšmių sritis $(-\infty; +\infty)$. Atvirkštinę funkciją surasime išreiškę kintamąjį $x$ kintamuoju $y$.

Funkcija $y=2x+1$ turi atvirkštinę visoje apibrėžimo srityje, nes kiekvieną $y$ reikšmę atitinka vienintelė $x$ reikšmė.




$$y=2x+1, \quad 2x=y-1, \quad x=\frac{y-1}{2}.$$

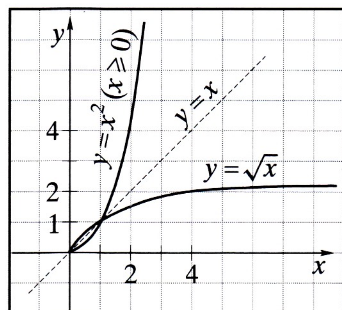
Keičiame kintamuosius $x \leftrightarrow y$: $y=\frac{x-1}{2}$. Atvirkštinė funkcija — tiesinė, todėl jos apibrėžimo sritis $x \in (-\infty; +\infty)$, reikšmių sritis $y \in (-\infty; +\infty)$.

*Atsakymas.* $y=\frac{x-1}{2}$; $D$: $x \in (-\infty; +\infty)$, $E$: $y \in (-\infty; +\infty)$.

**4b.** Funkcijos $y=\sqrt{x}$, $x \geqslant 0$, apibrėžimo sritis $[0; +\infty)$, reikšmių sritis $[0; +\infty)$.

Kadangi kiekvieną savo reikšmę $y$ funkcija $y=\sqrt{x}$ $(x \geqslant 0)$ įgyja vienintelį kartą, tai ji turi atvirkštinę.

Iš lygybės $y=\sqrt{x}$ išsireiškiame $x$ — abi puses keliame kvadratu ir sukeičiame kintamuosius vietomis:




$$y^2=x, \quad x \leftrightarrow y, \quad y=x^2.$$

Atvirkštinės funkcijos reikšmių ir apibrėžimo sritys, palyginus su pradine funkcija, pasikeičia vietomis.

*Atsakymas.* $y=x^2$, $D$: $x \in [0; +\infty)$, $E$: $y \in [0; +\infty)$.

**4c.** $y = x^2 - 4x + 4$, kai $x \leqslant 2$. Apibrėžimo sritis $(-\infty; 2]$, reikšmių sritis $[0; +\infty)$.
Pertvarkome:

$$y = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2.$$

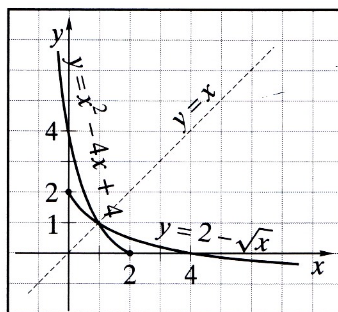
Šios funkcijos grafikas yra parabolės $y = (x - 2)^2$ kairioji šaka nuo viršūnės $(2; 0)$. Kadangi funkcija mažėjanti, tai ji turi atvirkštinę.
Išreikškime $x$, iš abiejų lygybės pusių traukdami kvadratinę šaknį:

$$\sqrt{y} = \sqrt{(x-2)^2}, \quad \sqrt{y} = |x - 2| \quad (\sqrt{a^2} = |a|).$$

Kai $x \leqslant 2$, tai $x - 2 < 0$.
Neigiamo skaičiaus modulis yra jam priešingas skaičius, todėl:

$$\sqrt{y} = -(x - 2), \quad \sqrt{y} = -x + 2,$$
$$x = -\sqrt{y} + 2.$$

Sukeitę kintamuosius, turime $y = 2 - \sqrt{x}$.




Gautos funkcijos apibrėžimo sritis $x \geqslant 0$, reikšmių sritis $(-\infty; 2]$.
Matome, kad palyginus su pradine funkcija, atvirkštinės funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sritys susikeitė vietomis.

*Atsakymas.* $y = 2 - \sqrt{x}$, $D$: $x \in [0; +\infty)$, $E$: $y \in (-\infty; 2]$.

**5a.** $[2{,}6] + [-3{,}4] - [3{,}1]$.

> Skaičiaus $a$ *sveikąja* dalimi vadiname didžiausią sveikąjį skaičių $n$, tenkinantį nelygybę
>
> $$n \leqslant a.$$
>
> Sveikoji skaičiaus $a$ dalis žymima $[a]$. Iš skaičiaus $a$ atėmę sveikąją jo dalį $[a]$ gausime trupmeninę $a$ dalį. Ji žymima $\{a\}$; $\{a\} = a - [a]$.

$[2{,}6]$ — sveikoji skaičiaus 2,6 dalis. Ji lygi 2.
$[-3{,}4] = -4$, nes sveikoji skaičiaus $-3{,}4$ dalis yra didžiausias iš mažesnių už $-3{,}4$ sveikųjų skaičių.
$[3{,}1] = 3$.

$$[2{,}6] + [-3{,}4] - [3{,}1] = 2 + (-4) - 3 = 2 - 4 - 3 = -5.$$

*Atsakymas.* $-5$.

**5b.** $[3{,}3] + \{-3{,}3\} + \{6{,}1\} = 3 + 0{,}7 + 0{,}1 = 3{,}8$, nes

$$[3{,}3] = 3; \quad \{-3{,}3\} = -3{,}3 - [-3{,}3] = -3{,}3 - (-4) = 0{,}7; \quad \{6{,}1\} = 0{,}1.$$

*Atsakymas.* 3,8.

**5c.** $\left\{-\frac{1}{4}\right\} + \left\{-2\frac{1}{2}\right\} - \left\{-2\frac{3}{4}\right\} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 1$, nes

$$\left\{-\frac{1}{4}\right\} = \frac{3}{4}; \quad \left\{-2\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}; \quad \left\{-2\frac{3}{4}\right\} = \frac{1}{4}.$$

*Atsakymas.* 1.

**6a.** $f(x) = kx + \frac{1}{2}$, $f(1) = 0$.
Įstatome duotąsias funkcijos ir argumento reikšmes:

$$0 = k \cdot 1 + \frac{1}{2}, \quad k = -\frac{1}{2}.$$

*Atsakymas.* $k = -\frac{1}{2}$.

**6b.** $f(x) = ax + b$, $f(0) = -5$, $f(7) = 9$.
Į funkcijos formulę įstatę vieną ir kitą reikšmių porą, gauname lygčių sistemą:

$$\begin{cases} -5 = a \cdot 0 + b, \\ 9 = a \cdot 7 + b. \end{cases}$$

Iš pirmos lygties turime, kad $b = -5$.
Šią $b$ reikšmę įstatome vietoj $b$ į antrąją sistemos lygtį:

$$9 = 7a - 5, \quad -7a = -5 - 9, \quad -7a = -14, \quad a = 2.$$

*Atsakymas.* $a = 2$, $b = -5$.

**6c.** $f(x) = ax^2 + bx + c$, $f(-3) = -8$, $f(0) = -2$, $f(3) = 10$.
Sudarome lygčių sistemą:

$$\begin{cases} -8 = a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c, \\ -2 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c, \\ 10 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c; \end{cases} \qquad \begin{cases} -8 = 9a - 3b + c, \\ -2 = c, \\ 10 = 9a + 3b + c. \end{cases}$$

Reikšmę $c = -2$ įstatome į pirmą ir trečią sistemos lygtis:

$$+\begin{cases} 9a - 3b - 2 = -8, & (1) \\ 9a + 3b - 2 = 10; \end{cases}$$
$$\overline{18a - 4 = 2,}$$

$$18a = 2 + 4, \quad 18a = 6, \quad a = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$

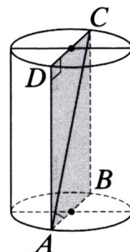
Šią $a$ reikšmę įstatome į (1) lygtį:

$$9 \cdot \frac{1}{3} - 3b - 2 = -8, \quad 3 - 3b - 2 = -8,$$
$$-3b = -8 + 2 - 3, \quad -3b = -9, \quad b = 3.$$

*Atsakymas.* $a = \frac{1}{3}$, $b = 3$, $c = -2$.

**7.** Ritinio ašinio pjūvio įstrižainė lygi $4\sqrt{2}$ ir su pagrindo plokštuma sudaro $45^\circ$ kampą. Raskite ritinio tūrį.

*Duota*: $ABCD$ — ašinis pjūvis,
$AC = 4\sqrt{2}$, $\angle CAB = 45^\circ$.
*Rasti*: $V_{\text{rit.}}$.
*Sprendimas.*




$$V_{\text{rit.}} = \pi R^2 H.$$

$ABCD$ — stačiakampis, $\triangle ABC$ — statusis,
$\angle CBA = 90^\circ$, $\angle CAB = 45^\circ \Rightarrow \angle ACB = 45^\circ$.
Taigi $\triangle ABC$ yra statusis lygiašonis. Pažymėkime $AB = BC = x$.
Pagal Pitagoro teoremą:

$$x^2 + x^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2,$$
$$2x^2 = 16 \cdot 2,$$
$$x^2 = 16, \quad x = 4 \quad (\text{reikšmė } x = -4 \text{ netinka}).$$

Tada

$$BC = x = H = 4,$$
$$AB = x = 2R = 4, \quad R = 2,$$
$$V_{\text{rit.}} = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = \pi \cdot 4 \cdot 4 = 16\pi.$$

*Atsakymas.* $16\pi$.

# Laipsninė funkcija

K9 (11.1–11.3)



**1.** Suprastinkite reiškinį.

a) $\sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[12]{x^7}$, kai $x > 0$;

b) $\sqrt{(\sqrt{2}-2)^2} + \sqrt[4]{4}$;

c) $m + \sqrt{(m-5)^2} - \sqrt{(3-m)^2}$, kai $m > 5$.

**2.** Duotos funkcijos $f(x) = x^7$ ir $g(x) = x^6$. Remdamiesi šių funkcijų savybėmis, palyginkite duoto reiškinio reikšmę su nuliu.

a) $f(10) - f(4)$;
b) $g(-3) - g(2)$;
c) $f(-2) \cdot g(-2)$.

**3.** Apskaičiuokite reiškinio reikšmę.

a) $\sqrt[3]{15\frac{5}{8}} - \sqrt[4]{0{,}0081} - \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{16}}}$;

b) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0{,}25} + 16^{0{,}75} - (0{,}5)^{-5} + \left(-\frac{4}{11}\right)^0 \cdot 5$;

c) $\frac{7(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}{20(2-\sqrt[4]{15})(2+\sqrt[4]{15})}$.

**4.** Išspręskite lygtį.

a) $x^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{x^2}$;

b) $x^{\frac{4}{3}} = 16$;

c) $x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{-\frac{7}{4}} = 8$.

**5.** Suprastinę reiškinį apskaičiuokite jo reikšmę.

a) $\frac{1-a^{-\frac{1}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}{a-1}$, kai $a = 4$;

b) $\left(m+n-\frac{4mn}{m+n}\right) : \left(\frac{m}{m+n} - \frac{n}{n-m} - \frac{2mn}{m^2-n^2}\right)$, kai $m = -2 \cdot 27^{\frac{1}{3}}$, $n = 2^{-2} \cdot 64^{\frac{1}{2}}$.

**6.** Nustatykite, ar duotoji funkcija yra lyginė, ar nelyginė, ar nėra nei lyginė, nei nelyginė.

a) $f(x) = x^3 + 2$;

b) $f(x) = |x| + x^2$;

c) $f(x) = \frac{(x+1)^2+x}{2x^3}$.

**7.** Kvadrato dvi priešingas kraštines sumažinus po 1,2 cm, kitas dvi priešingas kraštines sumažinus po 1,5 cm, gautas stačiakampis, kurio plotas 14,4 $cm^2$ mažesnis už duotojo kvadrato plotą. Raskite kvadrato kraštinės ilgį.

**1.** Suprastinkite reiškinį.

a) $\sqrt[4]{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}$, kai $x > 0$;

b) $\sqrt{(3-\sqrt{5})^2} + \sqrt[6]{125}$;

c) $\sqrt{(2x-1)^2} + \sqrt{(3x-1)^2}$, kai $\frac{1}{3} \leqslant x < \frac{1}{2}$.

**2.** Duotos funkcijos $f(x) = x^7$ ir $g(x) = x^6$. Remdamiesi šių funkcijų savybėmis, palyginkite duoto reiškinio reikšmę su nuliu.

a) $g(-2) \cdot g(30)$;

b) $f(6) + f(-4)$;

c) $f(-5) + g(-5)$.

**3.** Apskaičiuokite reiškinio reikšmę.

a) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}} - \sqrt[3]{0{,}027} + \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{4}}}$;

b) $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}} + 9^{0,5} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} + \left(-\frac{5}{6}\right)^0 \cdot 11$;

c) $\frac{3(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2}{20(\sqrt{5}-\sqrt[4]{21})(\sqrt{5}+\sqrt[4]{21})}$.

**4.** Išspręskite lygtį.

a) $x^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{x^3}$;

b) $x^{\frac{2}{3}} = 25$;

c) $x^{-\frac{1}{7}} \cdot x^{\frac{9}{7}} = 256$.

**5.** Suprastinę reiškinį apskaičiuokite jo reikšmę.

a) $\frac{1+a^{\frac{1}{2}}}{1-a^{-\frac{1}{2}}} - \frac{a-1}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}$, kai $a = 9$;

b) $\left(a - b + \frac{4ab}{a-b}\right)\left(\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b} + \frac{2ab}{b^2-a^2}\right)$, kai $a = 2^{-1} \cdot 64^{\frac{2}{3}}$, $b = 3^{-2} \cdot 81^{\frac{1}{4}}$.

**6.** Nustatykite, ar duotoji funkcija yra lyginė, ar nelyginė, ar nėra nei lyginė, nei nelyginė.

a) $f(x) = x^5 + x^3 - x$;

b) $f(x) = 2x - |x|$;

c) $f(x) = \frac{3x-(2-x)^2}{4x^4}$.

**7.** Stačiakampio ilgesniąją kraštinę sumažinus 4 cm, o trumpesniąją padidinus 7 cm, gautas kvadratas, kurio plotas 100 cm$^2$ didesnis už stačiakampio plotą. Raskite kvadrato kraštinės ilgį.

# Laipsninė funkcija



**1a.** $\sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[12]{x^7}$.

***I būdas.*** Šaknis keiskime laipsniais:

$$\sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[12]{x^7} = x^{\frac{3}{8}} \cdot x^{\frac{7}{12}} = x^{\frac{3}{8}+\frac{7}{12}} = x^{\frac{3\cdot3+7\cdot2}{24}} = x^{\frac{9+14}{24}} = x^{\frac{23}{24}} = \sqrt[24]{x^{23}}.$$

***II būdas.*** Galima skaičiuoti ir taip:

$$\sqrt[24]{x^9} \cdot \sqrt[24]{x^{14}} = \sqrt[24]{x^{9+14}} = \sqrt[24]{x^{23}}.$$

*Atsakymas.* $\sqrt[24]{x^{23}}$.

**1b.** $\sqrt{(\sqrt{2}-2)^2} + \sqrt[4]{4}$.

$$\sqrt{a^2} = |a| = \left[ \begin{array}{ll} a, & \text{kai } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{kai } a < 0. \end{array} \right.$$

$$\sqrt{(\sqrt{2}-2)^2} + \sqrt[4]{4} = |\sqrt{2}-2| + \sqrt[4]{2^2} = |\sqrt{2}-2| + \sqrt{2}.$$

Kadangi $\sqrt{2} - 2 < 0$, tai

$$|\sqrt{2}-2| = -(\sqrt{2}-2).$$

Vadinasi,

$$|\sqrt{2}-2| + \sqrt{2} = -(\sqrt{2}-2) + \sqrt{2} = -\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} = 2.$$

*Atsakymas.* 2.

**1c.** $m + \sqrt{(m-5)^2} - \sqrt{(3-m)^2}$, kai $m > 5$.

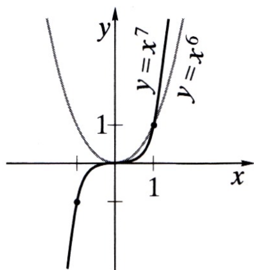
$$m + \sqrt{(m-5)^2} - \sqrt{(3-m)^2} = m + |m-5| - |3-m|.$$

Nustatome reiškinių $m - 5$ ir $3 - m$ ženklus:
kadangi $m > 5$, tai $m - 5 > 0$, todėl $|m-5| = m - 5$;
kai $m > 5$, tai $3 - m < 0$, todėl $|3-m| = -(3-m)$. Tada

$$m + |m-5| - |3-m| = m + (m-5) + (3-m) = m - 2.$$

*Atsakymas.* $m - 2$.

**2.** $f(x) = x^7$, $g(x) = x^6$.




**2a.** $f(10) - f(4)$.

Kadangi funkcija $f(x) = x^7$ yra didėjanti, tai $f(10) > f(4)$. Vadinasi,

$$f(10) - f(4) > 0.$$

*Atsakymas.* $f(10) - f(4) > 0$.

**2b.** $g(-3) - g(2)$.

Kadangi funkcija $g(x) = x^6$ yra lyginė, tai $g(-3) = g(3)$.
Kadangi funkcija $g(x) = x^6$ intervale $(0; +\infty)$ yra didėjanti, tai

$$g(3) > g(2) \quad \text{ir} \quad g(-3) - g(2) = g(3) - g(2) > 0.$$

*Atsakymas.* $g(-3) - g(2) > 0$.

**2c.** $f(-2) \cdot g(-2)$.

Kadangi funkcija $f(x)$ — nelyginė, o funkcija $g(x)$ — lyginė, tai $f(-2) = -f(2)$, $g(-2) = g(2)$, todėl

$$f(-2) \cdot g(-2) = -f(2) \cdot g(2) < 0.$$

*Atsakymas.* $f(-2) \cdot g(-2) < 0$.

**3a.** $\sqrt[3]{15\frac{5}{8}} - \sqrt[4]{0{,}0081} - \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{16}}}$.

Nieko čia gudrauti nereikia:

$$\sqrt[3]{15\frac{5}{8}} - \sqrt[4]{0{,}0081} - \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{16}}} = \sqrt[3]{\frac{125}{8}} - 0{,}3 - \frac{2}{\frac{1}{4}} = \frac{5}{2} - 0{,}3 - 2 \cdot 4 =$$
$$= 2{,}5 - 0{,}3 - 8 = -5{,}8.$$

*Atsakymas.* $-5{,}8$.

**3b.** $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,25} + 16^{0,75} - (0,5)^{-5} + \left(-\frac{4}{11}\right)^{0} \cdot 5.$

Visas dešimtaines trupmenas keisime paprastosiomis, o laipsnių pagrindus keisime kuo mažesniais.

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,25} + 16^{0,75} - (0,5)^{-5} + \left(-\frac{4}{11}\right)^{0} \cdot 5 =$$
$$= \left(2^{-4}\right)^{-\frac{1}{4}} + \left(2^{4}\right)^{\frac{3}{4}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} + 1 \cdot 5 = 2^1 + 2^3 - \left(2^{-1}\right)^{-5} + 5 =$$
$$= 2 + 8 - 2^5 + 5 = 2 + 8 - 32 + 5 = -17.$$

*Atsakymas.* $-17.$

**3c.** $\frac{7(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}{20(2-\sqrt[4]{15})(2+\sqrt[4]{15})}.$

Skaitiklyje taikome skirtumo kvadrato, o vardiklyje — kvadratų skirtumo formules.

$$\frac{7\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}{20(2-\sqrt[4]{15})(2+\sqrt[4]{15})} = \frac{7((\sqrt{3})^2 - 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2)}{20\left(2^2 - (\sqrt[4]{15})^2\right)} =$$
$$= \frac{7\left(3 - 2\sqrt{15} + 5\right)}{20\left(4-\sqrt{15}\right)} = \frac{7\left(8-2\sqrt{15}\right)}{20\left(4-\sqrt{15}\right)} = \frac{14\left(4-\sqrt{15}\right)}{20\left(4-\sqrt{15}\right)} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}.$$

*Atsakymas.* $\frac{7}{10}.$

**4a.** $x^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{x^2}.$

***I būdas.*** Taikome savybę $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Tada $x^{\frac{3}{2}} = x^{-2}$. Laipsniai, kurių pagrindai vienodi, o laipsnių rodikliai skirtingi, lygūs tik tada, kai pagrindas lygus 1. Taigi $x = 1$.

***II būdas.*** Patogu lygtį pakeisti lygtimi su sveikaisiais rodikliais. Abi lygties puses keliame kvadratu:

$$x^3 = \frac{1}{x^4}, \quad x^3 \cdot x^4 = 1, \quad x^7 = 1, \quad x = 1.$$

Patikriname: $1^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{1^2}$ — lygybė teisinga.

*Atsakymas.* $x = 1.$

**4b.** $x^{\frac{4}{3}} = 16.$

***I būdas.*** Abi lygties puses keliame laipsniu, atvirkštiniu $x$ laipsnio rodikliui:

$$\left(x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(2^4\right)^{\frac{3}{4}}, \quad x = 2^3, \quad x = 8.$$

***II būdas.*** Abi lygties puses keliame kubu:

$$x^4 = 16^3, \quad x^4 = 2^{4\cdot 3}, \quad x_1 = 2^3, \quad x_2 = -2^3.$$

Neigiamą sprendinį atmetame, nes $x^{\frac{4}{3}}$ apibrėžtas tik su teigiamais $x$.

*Atsakymas.* $x = 8$.

**4c.** $x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{-\frac{7}{4}} = 8$.

***I būdas.*** Pertvarkome duotą lygtį:

$$x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{-\frac{7}{4}} = 2^3, \quad x^{\frac{1}{4}-\frac{7}{4}} = 2^3, \quad x^{-\frac{6}{4}} = 2^3, \quad x^{-\frac{3}{2}} = 2^3.$$

Abi lygties $x^{-\frac{3}{2}} = 2^3$ puses keliame laipsniu, atvirkštiniu $x$ laipsnio rodikliui:

$$\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(2^3\right)^{-\frac{2}{3}}, \quad x = 2^{-2}, \quad x = \frac{1}{4}.$$

***II būdas.*** Abi lygties puses keliame ketvirtuoju laipsniu:

$$x^1 \cdot x^{-7} = 8^4, \quad x^{-6} = 2^{12}.$$

Keliame $(-1)$-uoju laipsniu:

$$x^6 = \frac{1}{2^{12}}, \quad x_1 = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}, \quad x_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

Neigiamą sprendinį atmetame. *Atsakymas.* $x = \frac{1}{4}$.

**5a.** $\frac{1-a^{-\frac{1}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}{a-1}$, kai $a = 4$.

Suprastiname reiškinį:

$$\frac{1 - a^{-\frac{1}{2}}}{1 + a^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}}{a - 1} = \frac{\left(1 - a^{-\frac{1}{2}}\right)\left(1 - a^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(1 + a^{\frac{1}{2}}\right)\left(1 - a^{\frac{1}{2}}\right)} + \frac{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}}{1 - a} =$$

$$= \frac{1 - a^{-\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}} + 1}{1 - a} + \frac{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}}{1 - a} = \frac{2 - 2a^{-\frac{1}{2}}}{1 - a} = \frac{2\left(1 - a^{-\frac{1}{2}}\right)}{1 - a}.$$

Kai $a = 4$, tai

$$\frac{2\left(1 - a^{-\frac{1}{2}}\right)}{1 - a} = \frac{2 \cdot \left(1 - 4^{-\frac{1}{2}}\right)}{1 - 4} = \frac{2 - 2 \cdot \left(2^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{-3} =$$

$$= \frac{2 - 2 \cdot 2^{-1}}{-3} = \frac{2 - 1}{-3} = -\frac{1}{3}.$$

*Atsakymas.* $-\frac{1}{3}$.

**5b.** $\left(m+n-\frac{4mn}{m+n}\right):\left(\frac{m}{m+n}-\frac{n}{n-m}-\frac{2mn}{m^2-n^2}\right)$, kai $m=-2\cdot 27^{\frac{1}{3}}$, $n=2^{-2}\cdot 64^{\frac{1}{2}}$.

Atliekame veiksmus:

1) $m+n-\frac{4mn}{m+n}=\frac{(m+n)^2-4mn}{m+n}=\frac{m^2+2mn+n^2-4mn}{m+n}=\frac{m^2-2mn+n^2}{m+n}=\frac{(m-n)^2}{m+n}$;

2) $\frac{m}{m+n}-\frac{n}{n-m}-\frac{2mn}{m^2-n^2}=\frac{m}{m+n}+\frac{n}{m-n}-\frac{2mn}{(m-n)(m+n)}=\frac{m(m-n)+n(m+n)-2mn}{(m-n)(m+n)}=$

$=\frac{m^2-mn+mn+n^2-2mn}{(m-n)(m+n)}=\frac{(m-n)^2}{(m-n)(m+n)}=\frac{m-n}{m+n}$;

3) $\frac{(m-n)^2}{m+n}:\frac{m-n}{m+n}=\frac{(m-n)^2\cdot(m+n)}{(m+n)\cdot(m-n)}=m-n$.

Kadangi

$$m=-2\cdot 27^{\frac{1}{3}}=-2\cdot 3=-6,$$

$$n=2^{-2}\cdot 64^{\frac{1}{2}}=2^{-2}\cdot 2^{6\cdot\frac{1}{2}}=2^{-2}\cdot 2^3=2,$$

tai $m-n=-6-2=-8$.

*Atsakymas.* $-8$.

**6.**

> Jei funkcijos apibrėžimo sritis simetriška nulio atžvilgiu ir su kiekvienu $x$ iš jos teisinga lygybė $f(-x)=f(x)$, tai funkcija yra lyginė.
> Jei funkcijos apibrėžimo sritis simetriška nulio atžvilgiu ir su kiekvienu $x$ iš jos teisinga lygybė $f(-x)=-f(x)$, tai funkcija yra nelyginė.
> Jeigu funkcijos apibrėžimo sritis nesimetriška nulio atžvilgiu arba funkcija yra tokia, kad bent su viena reikšmių $x$ ir $-x$ pora $f(-x)\neq f(x)$ ir bent su viena reikšmių $x$ ir $-x$ pora $f(-x)\neq -f(x)$, tai funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.

**6a.** $f(x)=x^3+2$.

Raskime $f(-x)$:

$$f(-x)=(-x)^3+2=-x^3+2.$$

Matome, kad

$$\text{nei } f(x)=f(-x), \quad \text{nei } -f(x)=f(-x).$$

Pavyzdžiui, kai $x=1$, tai $f(1)=3$, $f(-1)=1$, t.y. $f(-1)\neq f(1)$ ir $f(-1)\neq -f(1)$.

*Atsakymas.* Funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.

**6b.** $f(x) = |x| + x^2$.
Randame $f(-x)$:

$$f(-x) = |-x| + (-x)^2 = |x| + x^2.$$

Matome, kad

$$f(-x) = f(x).$$

*Atsakymas*. Funkcija yra lyginė.

**6c.** $f(x) = \frac{(x+1)^2+x}{2x^3}$.
Funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sritis simetriška nulio atžvilgiu, nes tik $x = 0$ nepriklauso $f(x)$ apibrėžimo sričiai:

$$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

Pertvarkykime $f(x)$:

$$f(x) = \frac{(x+1)^2 + x}{2x^3} = \frac{x^2 + 2x + 1 + x}{2x^3} = \frac{x^2 + 3x + 1}{2x^3}.$$

Raskime $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 3 \cdot (-x) + 1}{2 \cdot (-x)^3} = \frac{x^2 - 3x + 1}{-2x^3} = \frac{3x - x^2 - 1}{2x^3}.$$

Imkime, pavyzdžiui, $x = 1$. Tada $f(1) = 2{,}5$, $f(-1) = -0{,}5$.

*Atsakymas*. Funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.

**7.** Kvadrato dvi priešingas kraštines sumažinus po 1,2 cm, kitas dvi priešingas kraštines sumažinus po 1,5 cm, gautas stačiakampis, kurio plotas 14,4 cm$^2$ mažesnis už duotojo kvadrato plotą. Raskite kvadrato kraštinės ilgį.

*Sprendimas*. Kvadrato kraštinę pažymėkime $x$, tada stačiakampio kraštinės yra

$$x - 1{,}2 \quad \text{ir} \quad x - 1{,}5.$$

Užrašykime abiejų figūrų plotus:

$$S_{\text{kvadrato}} = x^2, \quad S_{\text{stačiakampio}} = (x - 1{,}2) \cdot (x - 1{,}5).$$

Remdamiesi sąlyga sudarome lygtį:

$$x^2 - (x - 1{,}2)(x - 1{,}5) = 14{,}4, \quad x^2 - x^2 + 1{,}5x + 1{,}2x - 1{,}8 = 14{,}4,$$
$$2{,}7x = 16{,}2, \quad x = 6.$$

*Atsakymas*. 6 cm.

# Rodiklinė funkcija



**1.** Nustatykite, ar funkcija $f(x)$ yra didėjanti, ar mažėjanti.

a) $f(x) = 6{,}2^x$;

b) $f(x) = 2^{-x}$;

c) $f(x) = \left(\frac{4}{\sqrt{19}}\right)^x$.

**2.** Nubraižykite funkcijos grafiką ir išvardykite jos savybes.

a) $y = 3^x + 1$;

b) $y = 3^{x-1}$;

c) $y = -3^x + 1$.

**3.** Išspręskite lygtį.

a) $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^x$;

b) $\frac{1}{3} \cdot 3^x = 9 \cdot 9^{\sqrt{x}}$;

c) $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0$.

**4.** Apskaičiuokite funkcijos $f(x)$ grafiko ir abscisių ašies susikirtimo taško koordinates.

a) $f(x) = 2^{x+2} - 2^x - 96$;

b) $f(x) = 6^x - 16 \cdot 3^x$;

c) $f(x) = 9^{\sqrt{x-3}} + 81 - 30 \cdot 3^{\sqrt{x-3}}$.

**5.** Su kuriomis $x$ reikšmėmis duotosios funkcijos reikšmės yra neneigiamos:

a) $f(x) = 0{,}25^{x^2-3x} - \left(\frac{1}{16}\right)^{-1}$?

b) $g(x) = 3^{\frac{-5x}{x-1}} - 9^{\frac{x-12}{2}}$?

c) $h(x) = 2^{2(x+5)} \cdot 3^{2(5x+1)} - 6^{6x+6}$?

**6.** Išspręskite nelygybę.

a) $2^x - 4 \cdot 0{,}5^x > 3$;

b) $2^{2x^2-4x+4} + 2^{2x^2-4x+3} + 4^{(x-1)^2} \geqslant 7 \cdot 2^8$;

c) $4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 \leqslant 0$.

**7.** Stačiakampio įstrižainių susikirtimo taškas nuo trumpesniosios jo kraštinės nutolęs 4 cm toliau, negu nuo ilgesniosios. Apskaičiuokite stačiakampio kraštinių ilgius, jei jo perimetras lygus 56 cm.

**1.** Nustatykite, ar funkcija $f(x)$ yra didėjanti, ar mažėjanti.

a) $f(x) = 3^x$;

b) $f(x) = 2^{-x}$;

c) $f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$.

**2.** Nubraižykite funkcijos grafiką ir išvardykite jos savybes.

a) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$;

b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$;

c) $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$.

**3.** Išspręskite lygtį.

a) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-2}$;

b) $\frac{1}{2} \cdot 2^x = 8 \cdot 8^{\sqrt{x}}$;

c) $4^x + 10^x = 2 \cdot 25^x$.

**4.** Apskaičiuokite funkcijos $f(x)$ grafiko ir abscisių ašies susikirtimo taško koordinates.

a) $f(x) = 7^x - 7^{x-1} - 6$;

b) $f(x) = 100^x - 625 \cdot 4^x$;

c) $f(x) = 16^{\sqrt{x+2}} + 64 - 20 \cdot 4^{\sqrt{x+2}}$.

**5.** Su kuriomis $x$ reikšmėmis duotosios funkcijos reikšmės yra neteigiamos:

a) $f(x) = 0{,}3^{x^2-8x+6} - 3\frac{1}{3}$?

b) $f(x) = 4^{\frac{2x}{1-x}} - 16^{\frac{x-6}{2}}$?

c) $f(x) = 2^{2(2x+3)} \cdot 5^{2(3x+2)} - 10^{5x+5}$?

**6.** Išspręskite nelygybę.

a) $2^x + 2^{3-x} < 6$;

b) $3^{3x^2-6x+5} + 3^{3x^2-6x+4} + 27^{(x-1)^2} < 13 \cdot 3^{12}$;

c) $\frac{2}{3} \cdot 9^{3-\frac{1}{x}} - 5 \cdot 3^{2-\frac{1}{x}} - 1 \geqslant 0$.

**7.** Stačiakampio viena kraštinė 1,4 cm ilgesnė už kitą, o perimetras lygus 24 cm. Apskaičiuokite stačiakampio įstrižainių susikirtimo taško atstumus iki jo kraštinių.

# Rodiklinė funkcija

**K10 (12.1–12.3)**

**1.**

Funkcija $f(x) = a^x$:
- yra didėjanti, kai $a > 1$;
- yra mažėjanti, kai $0 < a < 1$;
- tampa tiesine funkcija $f(x) = 1$, kai $a = 1$.

**1a.** Funkcija $f(x) = 6{,}2^x$ yra didėjanti, nes $6{,}2 > 1$.

*Atsakymas*. Didėjanti.

**1b.** Funkcija $f(x) = 2^{-x}$ yra mažėjanti, nes $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, o $0 < \frac{1}{2} < 1$.

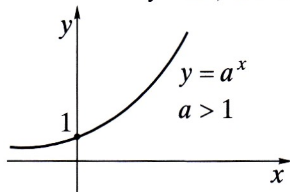
*Atsakymas*. Mažėjanti.

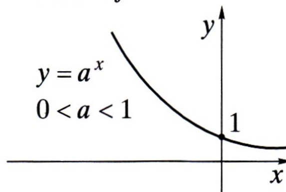
**1c.** Funkcija $f(x) = \left(\frac{4}{\sqrt{19}}\right)^x$ yra mažėjanti, nes $\frac{4}{\sqrt{19}} = \sqrt{\frac{16}{19}} < 1$.

*Atsakymas*. Mažėjanti.

**2.**

$y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ – rodiklinė funkcija



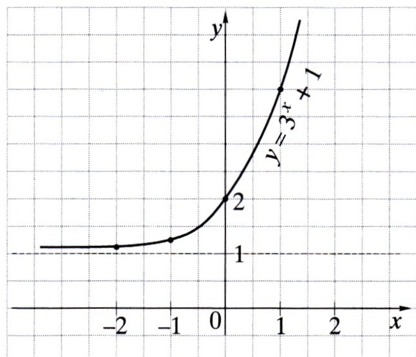

$D$: $x \in (-\infty; +\infty)$, $E$: $y \in (0; +\infty)$

**2a.** $y = 3^x + 1$.

***I būdas.*** Sudarome funkcijos reikšmių lentelę ir braižome grafiką:

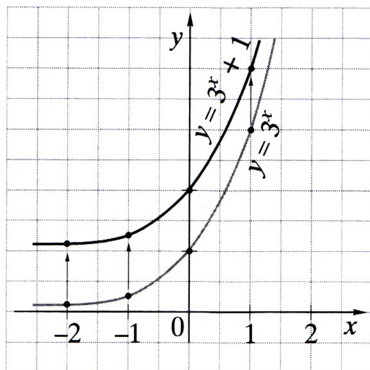
| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $1\frac{1}{9}$ | $1\frac{1}{3}$ | $2$ | $4$ | $10$ |

Kai $x = -2$, tai $y = 3^{-2} + 1 = \frac{1}{9} + 1 = 1\frac{1}{9}$;
kai $x = -1$, tai $y = 3^{-1} + 1 = \frac{1}{3} + 1 = 1\frac{1}{3}$;
kai $x = 0$, tai $y = 3^0 + 1 = 1 + 1 = 2$;
kai $x = 1$, tai $y = 3^1 + 1 = 3 + 1 = 4$;
kai $x = 2$, tai $y = 3^2 + 1 = 9 + 1 = 10$.




Funkcijos $y = 3^x + 1$ apibrėžimo sritis yra $x \in (-\infty; +\infty)$, reikšmių sritis yra $y \in (1; +\infty)$. Funkcija yra didėjanti.

***II būdas.*** Funkcijos $y = 3^x + 1$ grafiką galima gauti pastūmus funkcijos $y = 3^x$ grafiką aukštyn atstumu, lygiu 1.



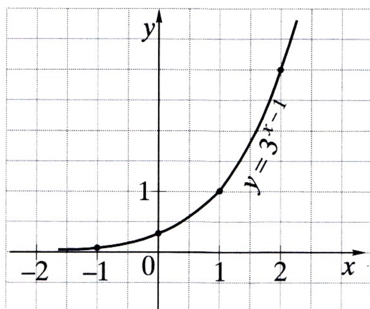

**2b.** $y = 3^{x-1}$.

***I būdas.*** Sudarome funkcijos $y = 3^{x-1}$ reikšmių lentelę:

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $\frac{1}{27}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | $1$ | $3$ |

Kai $x = -2$, tai $y = 3^{-2-1} = 3^{-3} = \frac{1}{27}$;
kai $x = -1$, tai $y = 3^{-1-1} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$;
kai $x = 0$, tai $y = 3^{0-1} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$;
kai $x = 1$, tai $y = 3^{1-1} = 3^{0} = 1$;
kai $x = 2$, tai $y = 3^{2-1} = 3^{1} = 3$.

Taigi funkcijos $y = 3^{x-1}$ grafikas yra:

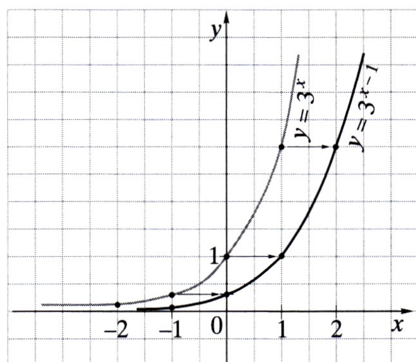



$D$: $x \in (-\infty; +\infty)$, $E$: $y \in (0; +\infty)$, $y = 3^{x-1}$ — didėjanti funkcija.

***II būdas.*** Funkcijos $y = 3^{x-1}$ grafiką galima gauti pastūmus funkcijos $y = 3^x$ grafiką $x$ ašies kryptimi į dešinę 1 vienetu.
Sudarome funkcijos $y = 3^x$ reikšmių lentelę:

| $x$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 | 3 | 9 |

Braižome funkcijos $y = 3^x$ grafiką. Pastūmę šį grafiką 1 vienetu į dešinę, gausime funkcijos $y = 3^{x-1}$ grafiką. (Pastūmę 1 vienetu į kairę, gausime $y = 3^{x+1}$ grafiką.)



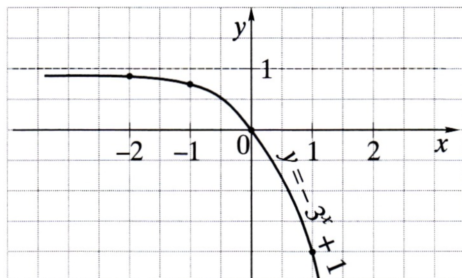

**2c.** $y = -3^x + 1$.

***I būdas.*** Sudarome funkcijos $y = -3^x + 1$ reikšmių lentelę:

| $x$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $\frac{8}{9}$ | $\frac{2}{3}$ | 0 | $-2$ | $-8$ |

Kai $x = -2$, tai $y = -3^{-2} + 1 = -\frac{1}{9} + 1 = \frac{8}{9}$;
kai $x = -1$, tai $y = -3^{-1} + 1 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$;
kai $x = 0$, tai $y = -3^0 + 1 = -1 + 1 = 0$;
kai $x = 1$, tai $y = -3^1 + 1 = -3 + 1 = -2$;
kai $x = 2$, tai $y = -3^2 + 1 = -9 + 1 = -8$.

Funkcijos $y = -3^x + 1$ grafikas:




$D$: $x \in (-\infty; +\infty)$,
$E$: $y \in (-\infty; 1)$.
Funkcija mažėjanti.

***II būdas.***

Iš funkcijos $y = f(x)$ grafiko galima gauti funkcijos $y = Af(x)$ grafiką, o tada — funkcijos $y = Af(x) + c$ grafiką.
Funkcijos $y = f(x)$ grafiko pakeitimas $y = Af(x)$ grafiku reiškia:
1) grafiko ištempimą $x$ ašies atžvilgiu $A$ kartų, kai $A > 1$;
2) suspaudimą $\frac{1}{A}$ kartų, kai $0 < A < 1$;
3) simetriją $x$ ašies atžvilgiu, kai $A = -1$;
4) simetriją $x$ ašies atžvilgiu ir ištempimą $|A|$ kartų, kai $A < -1$;
5) simetriją $x$ ašies atžvilgiu ir suspaudimą $\frac{1}{|A|}$ kartų, kai $-1 < A < 0$.

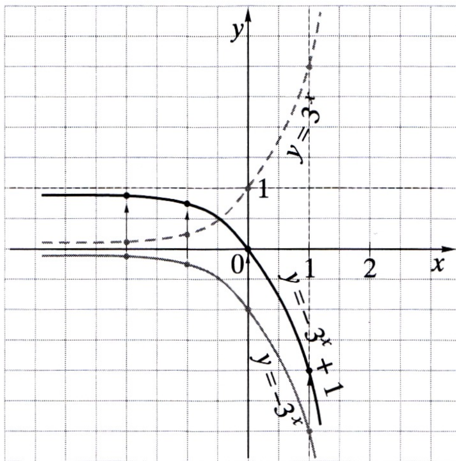
Pertvarkome duotosios funkcijos išraišką:

$$y = -3^x + 1 = -1 \cdot 3^x + 1.$$

Mūsų atveju $A = -1$, taigi funkcijos $y = -3^x + 1$ grafiką gausime iš funkcijos

$$y = 3^x$$

grafiko, atlikę simetriją $x$ ašies atžvilgiu ir paslinkę grafiką 1 vienetu aukštyn.




**3a.** $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^x$.
Suvienodiname laipsnių pagrindus:

$$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^x, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}.$$

Kadangi laipsnių pagrindai vienodi, tai lygybė bus teisinga, kai laipsnių rodikliai bus lygūs: $2x = -x$, $2x + x = 0$, $3x = 0$, $x = 0$.

*Atsakymas.* $x = 0$.

**3b.** $\frac{1}{3} \cdot 3^x = 9 \cdot 9^{\sqrt{x}}$.

Pertvarkome lygtį, kad kairėje ir dešinėje jos pusėse būtų laipsniai su vienodais pagrindais:

$$3^{-1} \cdot 3^x = 3^2 \cdot (3^2)^{\sqrt{x}}, \quad 3^{-1+x} = 3^{2+2\sqrt{x}},$$
$$-1 + x = 2 + 2\sqrt{x}, \quad -2\sqrt{x} + x - 1 - 2 = 0, \quad x - 2\sqrt{x} - 3 = 0.$$

Lygtis $x - 2\sqrt{x} - 3 = 0$ yra iracionalioji (nežinomasis yra pošaknyje). Išspręskime šią lygtį.

***I būdas.*** Įsivedame naują nežinomąjį. Tegul $\sqrt{x} = z$, $z \geqslant 0$. Tada

$$z^2 - 2z - 3 = 0.$$

Iracionaliąją lygtį pakeitėme kvadratine. Ją galima spręsti remiantis diskriminantu, o galima remtis Vijeto teorema:

$$\begin{cases} z_1 \cdot z_2 = -3, \\ z_1 + z_2 = 2; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad z_1 = 3, \quad z_2 = -1 < 0.$$

Grįžtame prie $x$:

$$\sqrt{x} = 3, \quad x = 9.$$

***II būdas.*** $x - 2\sqrt{x} - 3 = 0, \quad x - 3 = 2\sqrt{x}.$

Keliame kvadratu — naikiname šaknį:

$$(x - 3)^2 = (2\sqrt{x})^2,$$
$$x^2 - 6x + 9 = 4x, \quad x^2 - 10x + 9 = 0.$$

Vėl remkimės Vijeto teorema:

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 9, \\ x_1 + x_2 = 10; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 9.$$

*Patikrinimas*:
kai $x = 1$, tai $x - 2\sqrt{x} - 3 = 1 - 2\sqrt{1} - 3 = 1 - 2 - 3 \neq 0$;
kai $x = 9$, tai $x - 2\sqrt{x} - 3 = 9 - 2\sqrt{9} - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$.

*Atsakymas*. $x = 9$.

**3c.** $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0$.

Pertvarkome lygtį siekdami gauti vienodų pagrindų laipsnius:

$$6 \cdot 2^{2x} - 13 \cdot (2 \cdot 3)^x + 6 \cdot 3^{2x} = 0,$$
$$6 \cdot 2^{2x} - 13 \cdot 2^x \cdot 3^x + 6 \cdot 3^{2x} = 0.$$

Dalijame iš $3^{2x} \neq 0$ (galima dalyti ir iš $2^{2x}$):

$$6 \cdot \frac{2^{2x}}{3^{2x}} - 13 \cdot \frac{2^x \cdot 3^x}{3^{2x}} + 6 \cdot \frac{3^{2x}}{3^{2x}} = 0,$$
$$6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 6 = 0.$$

Pažymime $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$, $t > 0$:

$$6t^2 - 13t + 6 = 0,$$
$$D = (-13)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6 = 25, \quad t_1 = \frac{3}{2}, \quad t_2 = \frac{2}{3}.$$

Grįžtame prie $x$:

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$, $x = -1$;

2) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^1$, $x = 1$.

*Atsakymas.* $x = -1$ ir $x = 1$.

**4.** Funkcijos $f(x)$ grafiko ir $Ox$ ašies (abscisių ašies) kirtimosi taško koordinates randame spręsdami lygtį $f(x) = 0$.

**4a.** Apskaičiuokite funkcijos $f(x) = 2^{x+2} - 2^x - 96$ grafiko ir abscisių ašies susikirtimo taško koordinates.

Sprendžiame lygtį:

$$2^{x+2} - 2^x - 96 = 0, \quad 2^x \cdot 2^2 - 2^x - 96 = 0, \quad 4 \cdot 2^x - 2^x - 96 = 0.$$

$2^x$ iškeliame prieš skliaustus:

$$2^x(4 - 1) = 96, \quad 2^x \cdot 3 = 96, \quad 2^x = 32, \quad 2^x = 2^5, \quad x = 5.$$

*Atsakymas.* (5; 0).

**4b.** Apskaičiuokite funkcijos $f(x) = 6^x - 16 \cdot 3^x$ grafiko ir abscisių ašies susikirtimo taško koordinates.

Sprendžiame lygtį:

$$6^x - 16 \cdot 3^x = 0, \quad (2 \cdot 3)^x - 16 \cdot 3^x = 0.$$
$$2^x \cdot 3^x - 16 \cdot 3^x = 0 \,|\, : 3^x > 0, \quad 2^x = 16, \quad 2^x = 2^4, \quad x = 4.$$

*Atsakymas.* (4; 0).

**4c.** Apskaičiuokite funkcijos $f(x) = 9^{\sqrt{x-3}} + 81 - 30 \cdot 3^{\sqrt{x-3}}$ grafiko ir abscisių ašies susikirtimo taško koordinates.

Sprendžiame lygtį:

$$9^{\sqrt{x-3}} + 81 - 30 \cdot 3^{\sqrt{x-3}} = 0, \quad 3^{2\sqrt{x-3}} + 81 - 30 \cdot 3^{\sqrt{x-3}} = 0.$$

Įsivedame naują nežinomąjį: $3^{\sqrt{x-3}} = t$, $t > 0$. Tada:

$$t^2 + 81 - 30t = 0, \quad t^2 - 30t + 81 = 0,$$
$$D = 900 - 4 \cdot 81 = 900 - 324 = 576 = 24^2,$$
$$t_1 = \frac{30+24}{2} = 27, \quad t_2 = \frac{30-24}{2} = 3.$$

Grįžtame prie $x$.

1) Kai $t = 3$, tai

$$3^{\sqrt{x-3}} = 3^1, \quad \sqrt{x-3} = 1, \quad \left(\sqrt{x-3}\right)^2 = 1, \quad x - 3 = 1, \quad x = 4.$$

Pasitikriname: kai $x = 4$, tai

$$9^{\sqrt{4-3}} + 81 - 30 \cdot 3^{\sqrt{4-3}} = 9 + 81 - 30 \cdot 3 = 0.$$

2) Kai $t = 27$, tai

$$3^{\sqrt{x-3}} = 27, \quad 3^{\sqrt{x-3}} = 3^3, \quad \sqrt{x-3} = 3, \quad \left(\sqrt{x-3}\right)^2 = 3^2,$$
$$x - 3 = 9, \quad x = 12.$$

Pasitikriname: kai $x = 12$, tai

$$9^{\sqrt{12-3}} + 81 - 30 \cdot 3^{\sqrt{12-3}} = 9^3 + 81 - 30 \cdot 3^3 = 0.$$

*Atsakymas.* (12; 0), (4; 0).

**5.** Neneigiamos reikšmės — didesnės už nulį arba lygios nuliui.

**5a.** Su kuriomis $x$ reikšmėmis funkcijos $f(x) = 0{,}25^{x^2-3x} - \left(\frac{1}{16}\right)^{-1}$ reikšmės yra neneigiamos?

Sprendžiame nelygybę:

$$0{,}25^{x^2-3x} - \left(\frac{1}{16}\right)^{-1} \geqslant 0, \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-3x} \geqslant 16^1, \quad 4^{-(x^2-3x)} \geqslant 4^2.$$

Sprendžiant rodiklines nelygybes, reikia nustatyti, ar funkcija yra didėjanti, ar mažėjanti.
Jei funkcija yra didėjanti (laipsnio pagrindas didesnis už 1), tai su didesne argumento reikšme funkcija įgyja didesnę reikšmę, t. y. jei $x_1 > x_2$, tai $f(x_1) > f(x_2)$. Todėl, jei laipsnių pagrindai yra lygūs, tai lyginant laipsnių rodiklius nelygybės ženklas nesikeičia.
Jei funkcija yra mažėjanti (laipsnio pagrindas mažesnis už 1), tai su didesne argumento reikšme funkcija įgyja mažesnę reikšmę, t. y. jei $x_1 > x_2$, tai $f(x_1) < f(x_2)$. Todėl lygindami laipsnio rodiklius, nelygybės ženklą keičiame priešingu.

Sprendžiame nelygybę

$$4^{-(x^2-3x)} \geqslant 4^2.$$

Funkcija $y = 4^x$ yra didėjanti, nes $4 > 1$, todėl nelygybės ženklas nesikeičia:

$$-(x^2 - 3x) \geqslant 2, \quad x^2 - 3x + 2 \leqslant 0.$$

Kvadratinį trinarį $x^2 - 3x + 2$ išskaidykime dauginamaisiais. Jo šaknis raskime remdamiesi Vijeto teorema:

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$
$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 3; \end{cases} \Rightarrow \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2.$$

Taigi $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$. Intervalų metodu randame sprendinius nelygybės:

$$(x - 1)(x - 2) \leqslant 0,$$

+ − +
1 2 x

*Atsakymas.* $x \in [1; 2]$.

**5b.** Su kuriomis $x$ reikšmėmis funkcijos $g(x) = 3^{\frac{-5x}{x-1}} - 9^{\frac{x-12}{2}}$ reikšmės yra neneigiamos?

Sprendžiame nelygybę:

$$3^{\frac{-5x}{x-1}} - 9^{\frac{x-12}{2}} \geqslant 0,$$
$$3^{\frac{-5x}{x-1}} \geqslant 9^{\frac{x-12}{2}}, \quad 3^{\frac{-5x}{x-1}} \geqslant 3^{2(\frac{x-12}{2})}, \quad 3^{\frac{-5x}{x-1}} \geqslant 3^{x-12}.$$

Funkcija $y = 3^x$ yra didėjanti $(3 > 0)$, todėl nelygybės ženklas nesikeis:

$$\frac{-5x}{x-1} \geqslant x - 12, \quad \frac{-5x}{x-1} - (x-12) \geqslant 0, \quad \frac{-5x-(x-12)(x-1)}{x-1} \geqslant 0,$$

$$\frac{-5x-(x^2-12x-x+12)}{x-1} \geqslant 0, \quad \frac{-5x-x^2+12x+x-12}{x-1} \geqslant 0,$$

$$\frac{-x^2+8x-12}{x-1} \geqslant 0, \quad \frac{x^2-8x+12}{x-1} \leqslant 0.$$

Kvadratinį trinarį $x^2 - 8x + 12$ skaidome dauginamaisiais:

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 12, \\ x_1 + x_2 = 8; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 6.$$

$$\frac{(x-2)(x-6)}{x-1} \leqslant 0,$$

− + − +
1 2 6 x

*Atsakymas.* $x \in (-\infty; 1) \cup [2; 6]$.

**5c.** Su kuriomis $x$ reikšmėmis funkcijos $h(x) = 2^{2(x+5)} \cdot 3^{2(5x+1)} - 6^{6x+6}$ reikšmės yra neneigiamos?

Sprendžiame nelygybę:

$$2^{2(x+5)} \cdot 3^{2(5x+1)} - 6^{6x+6} \geqslant 0, \quad 2^{2(x+5)} \cdot 3^{2(5x+1)} - (2 \cdot 3)^{6x+6} \geqslant 0,$$

$$2^{2x+10} \cdot 3^{10x+2} - 2^{6x+6} \cdot 3^{6x+6} \geqslant 0.$$

Dalijame iš $2^{2x+10} \cdot 3^{10x+2} > 0$:

$$1 - 2^{4x-4} \cdot 3^{-4x+4} \geqslant 0,$$

$$1 - \frac{2^{4x-4}}{3^{4x-4}} \geqslant 0, \quad \frac{2^{4x-4}}{3^{4x-4}} \leqslant 1,$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{4x-4} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^0.$$

Kadangi $\frac{2}{3} < 1$, tai

$$4x - 4 \geqslant 0, \quad 4x \geqslant 4, \quad x \geqslant 1.$$

*Atsakymas.* $x \in [1; +\infty)$.

**6a.** $2^x - 4 \cdot 0{,}5^x > 3.$

Pertvarkome nelygybę:

$$2^x - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x > 3,$$

$$2^x - \frac{4}{2^x} > 3.$$

Įsivedame naują nežinomąjį $2^x = t$, $t > 0$. Tada

$$t - \frac{4}{t} > 3.$$

Dauginame iš $t$ ($t > 0$) — nelygybės ženklas nesikeičia:

$$t^2 - 4 > 3t, \quad t^2 - 3t - 4 > 0.$$

Kvadratinį trinarį $t^2 - 3t - 4$ skaidome dauginamaisiais:

$$\begin{cases} t_1 \cdot t_2 = -4, \\ t_1 + t_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \quad t_1 = 4, \quad t_2 = -1.$$

$$(t - 4)(t + 1) > 0.$$

+ − +
−1 4 $t$

$$\begin{cases} t > 0, \\ t \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty) \end{cases} \Rightarrow \quad t > 4.$$

Grįžtame prie $x$:

$$t > 4, \quad 2^x > 4, \quad 2^x > 2^2, \quad x > 2.$$

*Pastaba.* Nelygybės $(t - 4)(t + 1) > 0$ sprendinius galima rasti ir nesiremiant skaičių tiese.

Kadangi $t > 0$, tai ir $t + 1 > 0$, todėl nelygybę $(t - 4)(t + 1) > 0$ galima padalyti iš $t + 1$ — jos ženklas nesikeis. Padalije gauname:

$$t - 4 > 0, \quad t > 4.$$

*Atsakymas.* $x \in (2; +\infty)$.

**6b.** $2^{2x^2-4x+4}+2^{2x^2-4x+3}+4^{(x-1)^2}\geqslant 7\cdot 2^8.$
Vienodiname laipsnių pagrindus:

$$2^{2x^2-4x+4}+2^{2x^2-4x+3}+2^{2(x^2-2x+1)}\geqslant 7\cdot 2^8,$$
$$2^{2x^2-4x+4}+2^{2x^2-4x+3}+2^{2x^2-4x+2}\geqslant 7\cdot 2^8,$$
$$2^{2x^2-4x+2}\cdot(2^2+2+1)\geqslant 7\cdot 2^8,$$
$$2^{2x^2-4x+2}\cdot 7\geqslant 7\cdot 2^8,$$
$$2^{2x^2-4x+2}\geqslant 2^8.$$

Kadangi $2>1$, tai nelygybės ženklas nesikeičia:

$$2x^2-4x+2\geqslant 8,\quad 2x^2-4x-6\geqslant 0,\quad x^2-2x-3\geqslant 0.$$

Kvadratinį trinarį skaidome dauginamaisiais:

$$\begin{cases} x_1\cdot x_2=-3, \\ x_1+x_2=2 \end{cases}\quad\Rightarrow\quad x_1=3,\ x_2=-1,$$

$$(x-3)(x+1)\geqslant 0.$$



*Atsakymas.* $x\in(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$.

**6c.** $4^{\frac{1}{x}-1}-2^{\frac{1}{x}-2}-3\leqslant 0.$
Vienodiname laipsnių pagrindus:

$$2^{2(\frac{1}{x}-1)}-2^{\frac{1}{x}-1}\cdot 2^{-1}-3\leqslant 0,\quad \left(2^{\frac{1}{x}-1}\right)^2-2^{\frac{1}{x}-1}\cdot\frac{1}{2}-3\leqslant 0.$$

Pažymėkime $2^{\frac{1}{x}-1}=t$, $t>0$. Tada:

$$t^2-\frac{1}{2}t-3\leqslant 0,\quad t^2-\frac{1}{2}t-3=0,$$
$$D=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+4\cdot 3=\frac{1}{4}+12=12\frac{1}{4}=\frac{49}{4}=\left(\frac{7}{2}\right)^2,$$
$$t_1=\frac{\frac{1}{2}+\frac{7}{2}}{2}=\frac{\frac{8}{2}}{2}=2,\quad t_2=\frac{\frac{1}{2}-\frac{7}{2}}{2}=\frac{-\frac{6}{2}}{2}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2},$$

$$(t-2)\left(t+\frac{3}{2}\right)\leqslant 0.$$

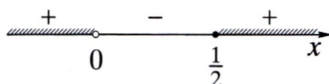
Kadangi $t > 0$, tai $t + \frac{3}{2} > 0$. Tada $t - 2 \leqslant 0$, $t \leqslant 2$.
Grįžtame prie $x$:

$$2^{\frac{1}{x}-1} \leqslant 2^1.$$

Kadangi funkcija $y = 2^x$ yra didėjanti ($2 > 1$), tai:

$$\frac{1}{x} - 1 \leqslant 1, \quad \frac{1}{x} - 2 \leqslant 0, \quad \frac{1-2x}{x} \leqslant 0, \quad \frac{-2\left(x - \frac{1}{2}\right)}{x} \leqslant 0,$$

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{x} \geqslant 0.$$

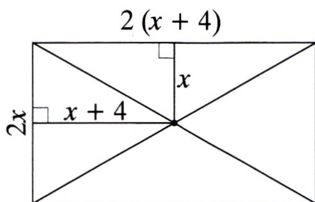



*Atsakymas.* $x \in (-\infty; 0) \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

**7.** Stačiakampio įstrižainių susikirtimo taškas nuo trumpesniosios jo kraštinės nutolęs 4 cm toliau, negu nuo ilgesniosios. Apskaičiuokite stačiakampio kraštinių ilgius, jei jo perimetras lygus 56 cm.

*Sprendimas.* Pažymėkime atstumą nuo įstrižainių susikirtimo taško iki ilgesniosios kraštinės $x$. Tada:

- atstumas nuo to taško iki trumpesniosios kraštinės yra $x + 4$;
- trumpesnioji kraštinė lygi $2x$;
- ilgesnioji kraštinė lygi $2(x + 4)$.




Remiantis sąlyga:

$$P = 2\big(2x + 2(x + 4)\big), \quad P = 56,$$
$$2(2x + 2x + 8) = 56, \quad x + x + 4 = 14, \quad 2x = 10, \quad x = 5.$$

Vadinasi, kraštinės lygios

$$2x = 2 \cdot 5 = 10 \text{ (cm)} \quad \text{ir} \quad 2(x + 4) = 2 \cdot 9 = 18 \text{ (cm)}.$$

*Atsakymas.* 10 cm, 18 cm.

# Logaritminė funkcija

**K11 (13.1–13.5)**

**1.** Apskaičiuokite reiškinio reikšmę.

a) $\lg 8 + \lg 125$; b) $\log_{\sqrt{3}} 25 - \log_3 7\frac{58}{81}$; c) $49^{1-\log_7 14} + 5^{-\log_5 4}$.

**2.** Raskite funkcijos apibrėžimo sritį.

a) $f(x) = \log_2(5 - x)$;

b) $f(x) = \lg \frac{3-x}{x+5}$;

c) $f(x) = \frac{x-5}{\lg(7-x)} - \sqrt{x - 4}$.

**3.** a) Grafiškai išspręskite lygtį $\log_2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$.

b) Raskite funkcijų $y = \log_{\frac{1}{3}} 27 - \log_{\frac{1}{9}}(2x - 3)$ ir $y = -\log_3(2x - 3)$ grafikų susikirtimo taško abscisę.

c) Raskite funkcijos $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x + 2)$ atvirkštinę funkciją $h(x)$. Nurodykite duotosios ir jai atvirkštinės funkcijų apibrėžimo ir reikšmių sritis.

**4.** Palyginkite:

a) $\log_2 5$ ir $\log_{0,5} 3$;

b) $\log_3 4 + \log_3 8$ ir $\log_3(4 + 8)$;

c) $\frac{\lg 15 - \lg 3}{2}$ ir $\frac{1}{2}\lg 25$.

**5.** Išspręskite lygtį.

a) $\log_4(x + 3) - \log_4(x - 1) = 2 - \log_4 8$;

b) $\log_{x-1}(x^2 + 2 - 3x) = 2$;

c) $x^{\lg x} = 10\,000$;

d) $9\log_2 x - \log_2^2(8x) + 7 = 0$;

e) $\log_3 x + \log_5 x = \frac{\lg 15}{\lg 3}$.

**6.** a) Raskite lygčių sistemos sprendinius:

$$\begin{cases} \log_7 y - \log_7 4 = \log_7(x + 1), \\ x + 4y = 16. \end{cases}$$

b) Apskaičiuokite sandaugą $x$ ir $y$ reikšmių, tenkinančių sistemą:

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 3, \\ 2\lg x - \lg y = 3. \end{cases}$$

**7.** a) Raskite nelygybės $\log_3(x - 8) > 1$ mažiausią sveikąjį sprendinį.

b) Raskite nelygybės $\lg(\log_7 x) < 0$ natūraliuosius sprendinius.

c) Raskite nelygybės $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1-2x}{x+3} > 0$ sveikuosius sprendinius.

d) Išspręskite nelygybę $\log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-7x+3} > 3$.

e) Išspręskite nelygybę $\log_{x-3}(x - 1) < 2$.

**1.** Apskaičiuokite reiškinio reikšmę:
a) $\lg 13 - \lg 130$; b) $\log_{\sqrt{5}} 2 + \log_5 6{,}25$; c) $10^{2-\lg 2} - 25^{\log_5 4}$.

**2.** Raskite funkcijos apibrėžimo sritį.
a) $f(x) = \log_3(9 - x)$;
b) $f(x) = \lg \frac{x+1}{4-x}$;
c) $f(x) = \frac{x}{\lg(1-x)} + \sqrt{10 - x}$.

**3.** a) Grafiškai išspręskite lygtį $\log_2(2x) = x$.
b) Raskite funkcijų $y = \lg x$ ir $y = 2\lg 100 - 4(\lg x)^{-1}$ grafikų susikirtimo taško abscisę.
c) Raskite funkcijos $f(x) = 3^x + 2$ atvirkštinę funkciją $h(x)$. Nurodykite duotosios ir jai atvirkštinės funkcijų apibrėžimo ir reikšmių sritis.

**4.** Palyginkite:
a) $\log_{0,3} 5$ ir $\log_3 6$;
b) $\log_5 3 + \log_5 7$ ir $\log_5(3 + 7)$;
c) $\frac{1}{3}\lg 27$ ir $\frac{\lg 14 - \lg 2}{3}$.

**5.** Išspręskite lygtį.
a) $\log_3 9 - 3 = \log_3(x - 1) - \log_3(x + 5)$;
b) $\log_x(3x^2 - 2x) = 2$;
c) $x^{\log_5 x} = 125x^2$;
d) $\lg^2(100x) + \lg^2(10x) = 14 - \lg x$;
e) $\log_2 x + \log_3 x = \frac{\lg 6}{\lg 2}$.

**6.** a) Raskite lygčių sistemos sprendinius:
$$\begin{cases} 4x - y = 2, \\ \log_{12} x + \log_{12} 3 = \log_{12}(y + 1). \end{cases}$$
b) Apskaičiuokite sandaugą $x$ ir $y$ reikšmių, tenkinančių sistemą:
$$\begin{cases} \log_4 x - \log_4 y = 2, \\ 2\log_2 x + \log_2 y = 2. \end{cases}$$

**7.** a) Raskite nelygybės $\lg(3x - 2) \geqslant 1$ mažiausią sveikąjį sprendinį.
b) Raskite nelygybės $\log_{\frac{1}{5}}(\log_5 x) > 0$ natūraliuosius sprendinius.
c) Raskite nelygybės $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2-x}{3x+1} > 0$ sveikuosius sprendinius.
d) Išspręskite nelygybę $\log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-6x+7} \geqslant 1$.
e) Išspręskite nelygybę $\log_{x-1}(x + 5) > 2$.

**1.**

$\log_a x + \log_a y = \log_a(xy), \quad a > 0, a \neq 1; x, y > 0;$
$\log_a x - \log_a y = \log_a\left(\frac{x}{y}\right), \quad x > 0, y > 0, a > 0, a \neq 1;$
$\log_a x^k = k \log_a x, \quad x > 0, a > 0, a \neq 1;$
$\log_{a^k} b = \frac{1}{k}\log_a b, \quad \log_a b = \log_{a^k} b^k, \quad b > 0, k \neq 0, a > 0, a \neq 1;$
$a^{\log_a b} = b, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0;$
$\log_a a = 1, \quad a > 0, a \neq 1.$

**1a.** $\lg 8 + \lg 125$.

$$\lg 8 + \lg 125 = \lg(8 \cdot 125) = \lg 1000 = \lg 10^3 = 3\lg 10 = 3 \cdot 1 = 3.$$

*Atsakymas*. 3.

**1b.** $\log_{\sqrt{3}} 25 - \log_3 7\frac{58}{81}$.
Suvienodinkime logaritmų pagrindus:

$$\log_{\sqrt{3}} 25 - \log_3 7\frac{58}{81} = \log_3 25^2 - \log_3 \frac{625}{81} =$$
$$= \log_3\left(25^2 : \frac{625}{81}\right) = \log_3 81 = 4.$$

*Atsakymas*. 4.

**1c.** $49^{1-\log_7 14} + 5^{-\log_5 4}$.
***I būdas*.**

$$49^{1-\log_7 14} + 5^{-\log_5 4} = 49^1 \cdot 49^{-\log_7 14} + 5^{\log_5 4^{-1}} =$$
$$= 49 \cdot 7^{-2\log_7 14} + 4^{-1} = 49 \cdot 7^{\log_7 14^{-2}} + \frac{1}{4} = 49 \cdot 14^{-2} + \frac{1}{4} =$$
$$= 49 \cdot \frac{1}{14^2} + \frac{1}{4} = \frac{7^2}{2^2 \cdot 7^2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

***II būdas*.** Kadangi

$$1 - \log_7 14 = \log_7 7 - \log_7 14 = \log_7 \frac{7}{14} = \log_7 \frac{1}{2} = \log_{49} \frac{1}{4},$$

tai gauname

$$49^{\log_{49} \frac{1}{4}} + 5^{\log_5 \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

*Atsakymas*. $\frac{1}{2}$.

**2.**

> Logaritminė funkcija $f(x) = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ apibrėžta teigiamųjų skaičių aibėje, t. y. $x \in (0; +\infty)$.

**2a.** $f(x) = \log_2(5 - x)$.
Pologaritminis reiškinys turi būti teigiamas: $5 - x > 0, \quad -x > -5, \quad x < 5.$

*Atsakymas.* $x \in (-\infty; 5)$.

**2b.** $f(x) = \lg \frac{3-x}{x+5}$.
Sprendžiame nelygybę:

$$\frac{3-x}{x+5} > 0, \quad \frac{x-3}{x+5} < 0,$$

+ − +
−5 3 x

*Atsakymas.* $x \in (-5; 3)$.

**2c.** $f(x) = \frac{x-5}{\lg(7-x)} - \sqrt{x-4}$.
Trupmenos vardiklis negali būti lygus 0, pologaritminis reiškinys turi būti teigiamas, pošaknis turi būti neneigiamas. Vadinasi:

$$\begin{cases} \lg(7-x) \neq 0, \\ 7 - x > 0, \\ x - 4 \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 7 - x \neq 10^0, \\ -x > -7, \\ x \geqslant 4; \end{cases} \quad \begin{cases} -x \neq 1 - 7, \\ x < 7, \\ x \geqslant 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq 6, \\ x < 7, \\ x \geqslant 4. \end{cases}$$

*Atsakymas.* $x \in [4; 6) \cup (6; 7)$.

**3a.** $\log_2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$.

> Lygties $f(x) = g(x)$ sprendiniai yra funkcijų $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ grafikų bendrų taškų abscisės (koordinatės $x$).

Braižome funkcijų $y = \log_2 x$ ir $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$ grafikus.
Sudarome funkcijos $y = \log_2 x$ reikšmių lentelę:

| $x$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\log_2 x$ | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 |

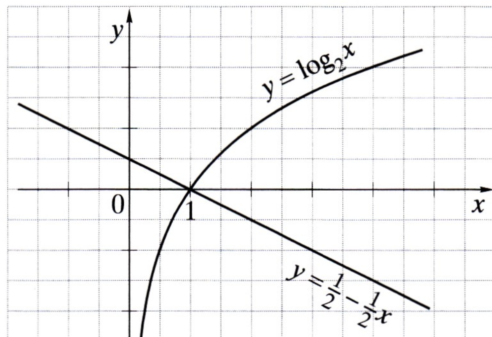
Kai $x = \frac{1}{4}$, tai $y = \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2 \cdot 1 = -2$;
kai $x = \frac{1}{2}$, tai $y = \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1 \cdot 1 = -1$;
kai $x = 1$, tai $y = \log_2 1 = 0$;
kai $x = 2$, tai $y = \log_2 2 = 1$;
kai $x = 4$, tai $y = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2 \cdot 1 = 2$.

Funkcija $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$ yra tiesinė. Jos gafikas — tiesė. Randame dviejų tos tiesės taškų koordinates:

| $x$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| $y$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ |

kai $x = 1$, tai $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1 = 0$;
kai $x = 2$, tai $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 = -\frac{1}{2}$.

Braižome abiejų funkcijų grafikus:




Grafikai susikerta, kai $x = 1$. Taigi $x = 1$ yra duotosios lygties sprendinys.

*Atsakymas.* $x = 1$.

**3b.** $y = \log_{\frac{1}{3}} 27 - \log_{\frac{1}{9}}(2x - 3)$ ir $y = -\log_3(2x - 3)$.

***I būdas.***

| Funkcijų grafikų susikirtimo taške funkcijų reikšmės (ordinatės) yra lygios. |
|---|

Susikirtimo taško abscisę rasime išsprendę lygtį:

$$\log_{\frac{1}{3}} 27 - \log_{\frac{1}{9}}(2x - 3) = -\log_3(2x - 3).$$

Suvienodiname logaritmų pagrindus:

$$\log_{3^{-1}} 27 - \log_{3^{-2}}(2x - 3) = -\log_3(2x - 3),$$

$$-\log_3 3^3 - \left(-\frac{1}{2}\right)\log_3(2x - 3) = -\log_3(2x - 3),$$

$$-3\log_3 3 + \frac{1}{2}\log_3(2x - 3) + \log_3(2x - 3) = 0,$$

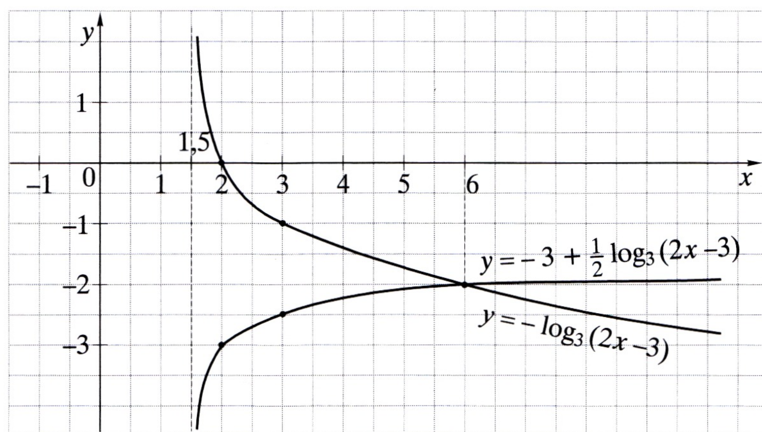
$$-3 + \frac{3}{2}\log_3(2x - 3) = 0, \quad \frac{3}{2}\log_3(2x - 3) = 3 \,|\cdot \frac{2}{3}, \quad \log_3(2x - 3) = 2.$$

$$2x - 3 = 3^2, \quad 2x = 9 + 3, \quad 2x = 12, \quad x = 6.$$

Patikriname: $\log_{\frac{1}{3}} 27 - \log_{\frac{1}{9}}(2 \cdot 6 - 3) = -\log_3(2 \cdot 6 - 3)$,
$-3 - (-1) = -2$, — lygybė teisinga.

***II būdas.*** Grafikų susikirtimo taško abscisę rasime braižydami duotųjų funkcijų grafikus.

1) $y = \log_{\frac{1}{3}} 27 - \log_{\frac{1}{9}}(2x - 3) = -3 + \frac{1}{2}\log_3(2x - 3)$,
kai $x = 2$, tai $y = -3 + \frac{1}{2}\log_3 1 = -3 + 0 = -3$,
kai $x = 3$, tai $y = -3 + \frac{1}{2}\log_3 3 = -3 + \frac{1}{2} = -2{,}5$,
kai $x = 6$, tai $y = -3 + \frac{1}{2}\log_3 9 = -3 + 1 = -2$;
2) $y = -\log_3(2x - 3)$,
kai $x = 2$, tai $y = -\log_3 1 = 0$,
kai $x = 3$, tai $y = -\log_3 3 = -1$,
kai $x = 6$, tai $y = -\log_3 9 = -2$.




*Atsakymas.* $x = 6$.

**3c.** $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x + 2)$.

Iš lygties

$$y = \log_{\frac{1}{3}}(x + 2),$$

išsireiškiame $x$:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^y = x + 2, \quad x = \left(\frac{1}{3}\right)^y - 2.$$

Sukeičiame kintamuosius vietomis:

$$x \leftrightarrow y, \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2.$$

Vadinasi, funkcijos $f(x)$ atvirkštinė funkcija:

$$h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2.$$

Funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sritis:

$$x + 2 > 0, \quad x > -2, \quad x \in (-2; +\infty).$$

Funkcijos $f(x)$ reikšmių sritis $y \in (-\infty; +\infty)$.
Funkcijos ir atvirkštinės funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sritys susikeičia vietomis.

$$D_f = E_h, \quad E_f = D_h.$$

*Atsakymas.* $h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$, $D_f = E_h = (-2; +\infty)$, $E_f = D_h \in \boldsymbol{R}$.

**4.** Jei $a > 1$, tai $\log_a b > 0$, kai $b > 1$, ir $\log_a b < 0$, kai $0 < b < 1$.
Jei $0 < a < 1$, tai $\log_a b < 0$, kai $0 < b < 1$, ir $\log_a b < 0$, kai $b > 1$.

**4a.** $\log_2 5$ ir $\log_{0,5} 3$.
Kadangi

$$\log_{0,5} 3 < 0, \quad \text{o} \quad \log_2 5 > 0,$$

tai

$$\log_2 5 > \log_{0,5} 3.$$

*Atsakymas.* $\log_2 5 > \log_{0,5} 3$.

**4b.** $\log_3 4 + \log_3 8$ ir $\log_3(4 + 8)$.
Pertvarkome reiškinius:

$$\log_3 4 + \log_3 8 = \log_3(4 \cdot 8) = \log_3 32, \quad \log_3(4 + 8) = \log_3 12.$$

Kadangi logaritmų pagrindai vienodi ir didesni už 1 ($3 > 1$), o $32 > 12$, tai

$$\log_3 32 > \log_3 12.$$

*Atsakymas.* $\log_3 4 + \log_3 8 > \log_3(4 + 8)$.

**4c.** $\frac{\lg 15 - \lg 3}{2}$ ir $\frac{1}{2} \lg 25$.
Lyginkime padvigubintus skaičius: $\lg 15 - \lg 3$ ir $\lg 25$.

$$\lg 15 - \lg 3 = \lg \frac{15}{3} = \lg 5 < \lg 25.$$

*Atsakymas.* $\frac{\lg 15 - \lg 3}{2} < \frac{1}{2} \lg 25$.

**5a.** $\log_4(x+3) - \log_4(x-1) = 2 - \log_4 8.$
Perkėlus dėmenis su minusais į kitą pusę, nebus trupmenų:

$$\log_4(x+3) + \log_4 8 = 2\log_4 4 + \log_4(x-1),$$
$$\log_4(8(x+3)) = \log_4(16(x-1)).$$

Kadangi reiškinių logaritmai yra lygūs, tai ir pologaritminiai reiškiniai lygūs:

$$8(x+3) = 16(x-1), \quad x+3 = 2(x-1), \quad x = 5.$$

Pasitikrinę, rašome atsakymą.

*Atsakymas.* 5.

**5b.** $\log_{x-1}(x^2+2-3x) = 2.$
Pagal logaritmo apibrėžimą

$$x^2+2-3x = (x-1)^2, \quad x^2-3x+2 = x^2-2x+1, \quad x = 1.$$

Tikriname: kai $x = 1$, tai logaritmo pagrindas $x - 1 = 1 - 1 = 0$, o jis visada turi būti teigiamas. Taigi lygtis sprendinių neturi.

*Atsakymas.* Sprendinių nėra.

**5c.** $x^{\lg x} = 10\,000.$
Abi lygties puses logaritmuojame:

$$\lg x^{\lg x} = \lg 10\,000, \quad \lg x \cdot \lg x = \lg 10^4, \quad \lg^2 x = 4;$$
$$\lg x = 2 \quad \text{arba} \quad \lg x = -2.$$

Sprendžiame abi lygtis:

$$\lg x = -2, \quad x = 10^{-2}, \quad x = \frac{1}{100},$$
$$\lg x = 2, \quad x = 10^2, \quad x = 100.$$

Tikriname — abi reikšmės tinka.

*Atsakymas.* $\frac{1}{100}$ ir 100.

**5d.** $9\log_2 x - \log_2^2(8x) + 7 = 0.$
Pertvarkome lygtį:

$$9\log_2 x - (\log_2(8x))^2 + 7 = 0,$$
$$9\log_2 x - (\log_2 8 + \log_2 x)^2 + 7 = 0,$$
$$9\log_2 x - (3 + \log_2 x)^2 + 7 = 0.$$

Pažymime $\log_2 x = a$. Tada:

$$9a - (3+a)^2 + 7 = 0, \quad 9a - (9 + 6a + a^2) + 7 = 0,$$
$$9a - 9 - 6a - a^2 + 7 = 0,$$
$$a^2 - 3a + 2 = 0, \quad a_1 = 1, \ a_2 = 2.$$

Grįžtame prie $x$:

$$\log_2 x = 1, \quad x = 2^1, \quad x = 2,$$
$$\log_2 x = 2, \quad x = 2^2, \quad x = 4.$$

Tikriname — abi reikšmės tinka.

*Atsakymas*. 2 ir 4.

**5e.** $\log_3 x + \log_5 x = \frac{\lg 15}{\lg 3}$.

Vienodinkime logaritmų pagrindus. Pagrindu pasirinkti galima, pavyzdžiui, 3. Taikysime logaritmo pagrindo keitimo formulę

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

$$\lg 3 = \frac{\log_3 3}{\log_3 10} = \frac{1}{\log_3 10}, \quad \lg 15 = \frac{\log_3 15}{\log_3 10},$$
$$\frac{\lg 15}{\lg 3} = \frac{\log_3 15 \cdot \log_3 10}{\log_3 10 \cdot 1} = \log_3 15.$$

Gauname lygtį:

$$\log_3 x + \frac{\log_3 x}{\log_3 5} = \log_3 15 \,|\cdot \log_3 5,$$
$$\log_3 x \cdot \log_3 5 + \log_3 x = \log_3 15 \cdot \log_3 5,$$
$$\log_3 x(\log_3 5 + 1) = \log_3 15 \cdot \log_3 5,$$
$$\log_3 x(\log_3 5 + \log_3 3) = \log_3 15 \cdot \log_3 5,$$
$$\log_3 x \cdot \log_3 15 = \log_3 15 \cdot \log_3 5 \,| : \log_3 15,$$
$$\log_3 x = \log_3 5,$$
$$x = 5.$$

Patikrinę, rašome atsakymą.

*Atsakymas*. 5.

**6a.** $\begin{cases} \log_7 y = \log_7(x+1) + \log_7 4, \\ x + 4y = 16. \end{cases}$

Pertvarkome pirmąją sistemos lygtį:

$$\log_7 y = \log_7\big(4(x+1)\big), \quad y = 4x + 4.$$

Gautą $y$ išraišką įstatome į antrą lygtį:

$$x + 4(4x+4) = 16, \quad x + 16x + 16 = 16, \quad 17x = 0, \quad x = 0.$$

Apskaičiuojame $y$. Kai $x = 0$, tai: $y = 4 \cdot 0 + 4, \quad y = 4$.
Tikriname — sprendinys (0; 4) tenkina pradinę sistemą:

$$\begin{cases} \log_7 4 = \log_7(0+1) + \log_7 4, \\ 0 + 4 \cdot 4 = 16. \end{cases}$$

*Atsakymas.* (0; 4).

**6b.** $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 3, \\ 2\lg x - \lg y = 3. \end{cases}$

Pertvarkome abi sistemos lygtis:

$$\begin{cases} \log_2(xy) = 3, \\ \lg(x^2 : y) = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 2^3, \\ \frac{x^2}{y} = 10^3. \end{cases}$$

Sudauginame sistemos lygtis — dings $y$:

$$x^3 = 2^3 \cdot 10^3, \quad x = 20.$$

Apskaičiuojame $y$:

$$y = \frac{2^3}{20} = \frac{2^2}{10} = 0{,}4.$$

Sistemos sprendinys $x = 20$, $y = 0{,}4$. Randame $x$ ir $y$ sandaugą:

$$x \cdot y = 20 \cdot 0{,}4 = 8.$$

*Pastaba.* Sandaugą $xy$ matome pertvarkę pirmąją sistemos lygtį: $xy = 8$. Bet neišsprendus sistemos negalime būti tikri, kad tai yra atsakymas, nes sistema galėjo sprendinių neturėti.

*Atsakymas.* 8.

**7.** Sprendžiant logaritmines nelygybes $\log_a x > b$ svarbu atkreipti dėmesį į apibrėžimo sritį ir logaritmo pagrindą:
- kai $a > 1$, tai $x > a^b$ (nelygybės ženklas lieka tas pats);
- kai $0 < a < 1$, tai $x < a^b$ (nelygybės ženklą keičiame priešingu).

**7a.** $\log_3(x-8) > 1$.

Logaritmas apibrėžtas, kai $x - 8 > 0$.
Kadangi logaritmo pagrindas $a = 3 > 1$, tai turime nelygybę

$$(x-8) > 3^1.$$

Taigi duotosios nelygybės sprendinių aibę sudaro $x$ reikšmės, tenkinančios nelygybių sistemą:

$$\begin{cases} x-8>0, \\ x-8>3; \end{cases} \quad \begin{cases} x>8, \\ x>11; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x > 11.$$

Mažiausias sveikasis skaičius, priklausantis intervalui $(11; +\infty)$, yra 12.

*Atsakymas.* 12.

**7b.** $\lg(\log_7 x) < 0$.

Kad $\lg(\log_7 x)$ turėtų prasmę, visų pirma turi turėti prasmę $\log_7 x$, t. y. $x > 0$. Kad $\lg(\log_7 x)$ turėtų prasmę, turi būti $\log_7 x > 0$. Su minėtais $x$ duotoji nelygybė teisinga, kai

$$\log_7 x < 10^0.$$

Sprendžiame nelygybių sistemą:

$$\begin{cases} x>0, \\ \log_7 x > 0, \\ \log_7 x < 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x>0, \\ x>1, \\ x<7; \end{cases} \quad \begin{cases} x>1, \\ x<7; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 1 < x < 7.$$

Intervalui $(1; 7)$ priklauso natūralieji skaičiai 2, 3, 4, 5 ir 6.

*Atsakymas.* 2, 3, 4, 5, 6.

**7c.** $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1-2x}{x+3} > 0$.

Kad logaritmas turėtų prasmę, turi būti

$$\frac{1-2x}{x+3} > 0.$$

Su tais $x$ duotoji nelygybė teisinga, kai

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1-2x}{x+3} > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^0, \quad \frac{1-2x}{x+3} < 1$$

(nelygybės ženklą keičiame, nes logaritmo pagrindas mažesnis už 1.)
Sprendžiame sistemą:

$$\begin{cases} \frac{1-2x}{x+3} > 0, \\ \frac{1-2x}{x+3} < 1. \end{cases}$$

Sistemos abi nelygybės yra racionaliosios. Jas pertvarkome:
1)

$$\frac{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x+3} > 0, \quad \frac{x-\frac{1}{2}}{x+3} < 0;$$

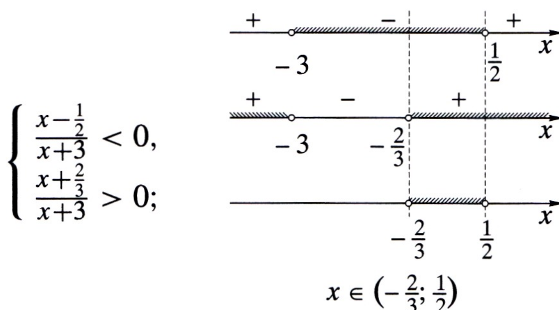
2)

$$\frac{1-2x}{x+3} - 1 < 0, \quad \frac{1-2x-x-3}{x+3} < 0,$$

$$\frac{-3x-2}{x+3} < 0, \quad \frac{-3\left(x+\frac{2}{3}\right)}{x+3} < 0, \quad \frac{x+\frac{2}{3}}{x+3} > 0.$$

Randame bendruosius abiejų nelygybių sprendinius:

$$\begin{cases} \frac{x-\frac{1}{2}}{x+3} < 0, \\ \frac{x+\frac{2}{3}}{x+3} > 0; \end{cases}$$




Vadinasi, nelygybės

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1-2x}{x+3} > 0$$

sprendiniai yra intervalo $\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\right)$ skaičiai. Šiame intervale yra tik vienas sveikasis skaičius — 0.

*Atsakymas.* 0.

**7d.** $\log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-7x+3} > 3.$

Dešinę nelygybės pusę parašome su logaritmu, kurio pagrindas 2:

$$\log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-7x+3} > \log_2 2^3.$$

Kadangi logaritmo pagrindas $2 > 1$, tai nelygybės ženklo nekeičiame:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-7x+3} > 2^3.$$

Suvienodiname laipsnių pagrindus — pagrindą galima imti tiek $\frac{1}{2}$, tiek ir 2.

***I būdas.***

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-7x+3} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}.$$

Kadangi $\frac{1}{2} < 1$, tai:

$$x^2 - 7x + 3 < -3 \quad \text{(nelygybės ženklą keičiame priešingu)},$$
$$x^2 - 7x + 6 < 0.$$

Kvadratinį trinarį

$$x^2 - 7x + 6$$

skaidome dauginamaisiais:

$$x^2 - 7x + 6 = 0, \quad x_1 = 1, \ x_2 = 6, \quad (x-1)(x-6) < 0.$$

Nustatome dauginamųjų $(x-1)$, $(x-6)$ ir sandaugos $(x-1)(x-6)$ ženklus intervaluose $(-\infty; 1)$, $(1; 6)$, $(6; +\infty)$:

| | $(-\infty; 1)$ | $(1; 6)$ | $(6; +\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $x-6$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $(x-1)(x-6)$ | $+$ | $-$ | $+$ |

Vadinasi, $x \in (1; 6)$.

***II būdas.***

$$2^{-(x^2-7x+3)} > 2^3.$$

Kadangi pagrindas didesnis už 1, tai nelygybės ženklo nekeičiame:

$$-(x^2 - 7x + 3) > 3, \quad x^2 - 7x + 3 < -3, \quad x^2 - 7x + 6 < 0.$$

Gavome tą pačią nelygybę kaip ir I būde.

*Atsakymas.* $x \in (1; 6)$.

**7e.** $\log_{x-3}(x - 1) < 2$.

Logaritmo pagrindas $x - 3$ gali būti tiek didesnis už 1, tiek mažesnis už 1. Reikia nagrinėti du atvejus:

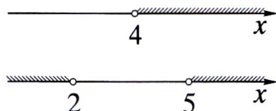
1) Kai pagrindas didesnis už 1, tai nelygybė ekvivalenti sistemai:

$$\begin{cases} x - 3 > 1, \\ x - 1 > 0, \\ x - 1 < (x - 3)^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 4, \\ x > 1, \\ x - 1 < x^2 - 6x + 9; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 4, \\ x^2 - 7x + 10 > 0. \end{cases}$$

Sprendžiame kvadratinę nelygybę — trinarį skaidome dauginamaisiais:

$$x^2 - 7x + 10 = 0, \ D = 9, \ x_1 = \frac{7+3}{2} = 5, \ x_2 = \frac{7-3}{2} = 2;$$

$$\begin{cases} x > 4, \\ (x - 5)(x - 2) > 0. \end{cases}$$




Šią sistemą galima išspręsti intervalų metodu (žr. aukščiau), bet galime pastebėti, kad dauginamasis $x - 2$ su $x > 4$ reikšmėmis yra teigiamas. Todėl antrą nelygybę galima padalyti iš $x - 2$:

$$\begin{cases} x > 4, \\ (x - 5)(x - 2) > 0; \ | : (x - 2) \end{cases} \quad \begin{cases} x > 4, \\ x > 5; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x > 5.$$

2) Kai logaritmo pagrindas mažesnis už 1 (bet didesnis už 0), tai nelygybė ekvivalenti sistemai:

$$\begin{cases} 0 < x - 3 < 1, \\ x - 1 > 0, \\ (x - 1) > (x - 3)^2; \end{cases} \quad \begin{cases} 3 < x < 4, \\ x > 1, \\ x - 1 > x^2 - 6x + 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 < x < 4, \\ (x - 2)(x - 5) < 0; \ | : (x - 2) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 < x < 4, \\ x - 5 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3 < x < 4, \\ x < 5; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 3 < x < 4.$$

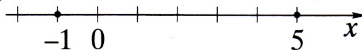
*Atsakymas.* $(3; 4) \cup (5; +\infty)$.

# Atsakymai

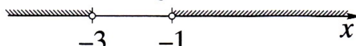
## K1. REALIŲJŲ SKAIČIŲ AIBĖ

**1 variantas**

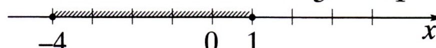
**1.** a) 75; b) 202; c) 24.
**2.** a) 0; b) $3\frac{56}{99}$; c) $5\frac{75}{77}$.
**3.** a) $\sqrt{40}$; b) $-2{,}4$; c) $\sqrt{3}+\sqrt{11}$.
**4.** a) 0,429; b) 0,8730; c) 490 cm.
**5.** a) $x=-1$, $x=5$




b) $x \in (-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$




c) $x \in [-4; 1]$

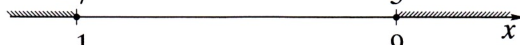



**6.** a) $\sqrt{2}-1$; b) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$; c) $\frac{\sqrt{6}+2-\sqrt{2}}{2}$.
**7.** a) 1; b) $-2\sqrt{2}$; c) 7.
**8.** 66.

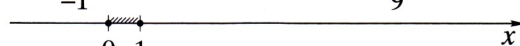
**2 variantas**

**1.** a) 84; b) 323; c) 64.
**2.** a) $2\frac{8}{21}$; b) $1\frac{49}{99}$; c) $1\frac{22}{185}$.
**3.** a) $\sqrt{50}>7$; b) $-\sqrt{11}>-3{,}32$; c) $\sqrt{17}<\sqrt{12}+\sqrt{5}$.
**4.** a) $\approx 0{,}455$; b) $\approx 3{,}3166$; c) $\approx 510$ cm.
**5.** a) $-7$; 3

b) $x \in (-\infty; -1) \cup (9; +\infty)$




c) $x \in [0; 1]$




**6.** a) $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$; b) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{5}$; c) $\frac{12\sqrt{10}-3\sqrt{5}+21\sqrt{2}+18}{31}$.
**7.** a) 2; b) $\sqrt{3}$; c) $-4\sqrt{6}$.
**8.** 64.

## K2. LAIPSNIAI IR ŠAKNYS

**1 variantas**

**1.** a) $\sqrt[5]{5^6}$; b) $\sqrt{2^5}$; c) $\sqrt{\frac{1}{3}}$.
**2.** a) $6^{\frac{1}{3}}$; b) $3^{\frac{2}{3}}$; c) $a^{\frac{2}{3}}$.
**3.** a) 3; b) 2; c) 12.
**4.** a) 20; b) $\frac{169}{1331}$; c) 2.
**5.** a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}} < \sqrt[5]{\frac{1}{16}}$; b) $\sqrt[5]{5} > \sqrt[10]{5\sqrt{5}}$; c) $\sqrt[3]{-7} < \sqrt[9]{-27}$.
**6.** a) $-1$; b) $2(\sqrt{6}+\sqrt{5})$; c) 252.
**7.** 45.

**2 variantas**

**1.** a) $\sqrt[4]{4^7}$; b) $\sqrt{3^3}$; c) $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$.

**2.** a) $7^{\frac{1}{4}}$; b) $6^{\frac{5}{11}}$; c) $a^{\frac{5}{8}}$.

**3.** a) 2; b) $5\frac{8}{11}$; c) 21.

**4.** a) 27; b) 18; c) 3.

**5.** a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}} > \sqrt[3]{\frac{1}{27}}$; b) $\sqrt[6]{6} > \sqrt[12]{6\sqrt{6}}$; c) $\sqrt[5]{-8} < \sqrt[15]{-125}$.

**6.** a) 3; b) $2\sqrt{5}+2$; c) 396.

**7.** 96.

## K3. ALGEBRINIAI REIŠKINIAI

**1 variantas**

**1.** a) $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; b) $x \in (-\infty; 2]$;
c) $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 7) \cup (7; 9)$.

**2.** a) $-11$; b) $-2\frac{1}{2}$; c) $-6\frac{2}{3}$.

**4.** a) Kai $x < 0$, tai $\frac{|x|+3x}{x} = 2$; kai $x > 0$, tai $\frac{|x|+3x}{x} = 4$;

b) $\sqrt{(x-1)^2} + |x-5| = \left[\begin{array}{ll} -2x+6, & \text{kai } x \leqslant 1; \\ 4, & \text{kai } 1 < x \leqslant 5; \\ 2x-6, & \text{kai } x > 5; \end{array}\right.$

c) $\sqrt[4]{\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^4} + 3\sqrt[3]{x^3} = \left[\begin{array}{ll} \frac{3x^2+7x-2}{2+x}, & \text{kai } x < -2 \text{ ir kai } x > 2; \\ \frac{3x^2+5x+2}{2+x}, & \text{kai } -2 < x \leqslant 2. \end{array}\right.$

**5.** 5.

**2 variantas**

**1.** a) $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; b) $x \in (-\infty; 2]$;
c) $x \in (-\infty; -5) \cup (-5; 4) \cup (4; 16)$.

**2.** a) 19; b) $2\frac{1}{3}$; c) $-2\frac{19}{22}$.

**3.** a) $1 + \sqrt{\frac{y}{x}}$; b) 2; c) $2\sqrt{x}$.

**4.** a) Kai $x < -1$, tai $\frac{|x+1|}{x+1} + 2x - 4 = 2x - 5$;
kai $x > -1$, tai $\frac{|x+1|}{x+1} + 2x - 4 = 2x - 3$;

b) $\sqrt{(x-3)^2} + |x-1| = \left[\begin{array}{ll} 4-2x, & \text{kai } x \leqslant 1, \\ 2, & \text{kai } 1 < x \leqslant 3, \\ 2x-4, & \text{kai } x > 3; \end{array}\right.$

c) $\sqrt[6]{\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)^6} - 2\sqrt[5]{(x+1)^5} = \left[\begin{array}{ll} \frac{-2x^2+2x+1}{x-1}, & \text{kai } x \leqslant \frac{1}{2} \text{ ir kai } x > 1; \\ \frac{-2x^2-2x+3}{x-1}, & \text{kai } \frac{1}{2} < x < 1. \end{array}\right.$

**5.** 13.

## K4. LYGTYS

**1 variantas**

**1.** a) Ekvivalenčios; b) neekvivalenčios; c) neekvivalenčios.
**2.** a) 1; b) $-4$; 0,5; c) 4.
**3.** a) $-6$; $-4$; $-1$; 1; b) 0,5; 1,5; c) $-3$; $-2$.
**4.** a) $-3$; $-2$; 2; 3; b) $-3$; 3; c) $-\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$; $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.
**5.** a) 1,5; b) 3; c) 1.
**6.** a) $a = -4$, $a = 4$; b) $a = 0$, $a = 1$; c) $a = -\frac{1}{2}$, $a = 0$, $a = \frac{1}{2}$.
**7.** $29\pi$.

**2 variantas**

**1.** a) Ekvivalenčios; b) neekvivalenčios; c) ekvivalenčios.
**2.** a) $-\frac{1}{4}$; b) $-3$; c) 5.
**3.** a) $-5$; $-1$; 3; b) $\frac{1}{2}$; 2; c) $-5$; $-1-\sqrt{6}$; 1; $-1+\sqrt{6}$.
**4.** a) $-4$; $-1$; 1; 4; b) $-4$; 4; c) lygtis sprendinių neturi.
**5.** a) Sprendinių nėra; b) 8; c) 2.
**6.** a) $a = -2\sqrt{5}$, $a = 2\sqrt{5}$; b) $a = 0$, $a = 2$; c) $a = -1$, $a = 0$, $a = 1$.
**7.** 54.

## K5. NELYGYBĖS. LYGČIŲ IR NELYGYBIŲ SISTEMOS

**1 variantas**

**1.** a) $x \in \boldsymbol{R}$; b) $x \in (-\infty; 1{,}5) \cup (5; +\infty)$; c) $x \in [0; 1) \cup (4; +\infty)$.
**2.** a) 1; b) $-1$; c) $-5$.
**3.** a) $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1)$; b) $a \in \left[-\frac{15}{11}; +\infty\right)$; c) $k \in \left(-7\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; 2)$.
**4.** a) $(-2{,}5; -1{,}5)$, $(2{,}5; 1{,}5)$; b) $(-2; 11)$, $(3; 1)$; c) $(-5; -1)$, $(5; 1)$, $(1; -5)$, $(-1; 5)$.
**5.** a) 18; 19; b) 0; 1; 2; c) 3; 4; 5; 6.
**6.** a) $x \in (-3; -2) \cup (2; 3)$; b) 0; c) $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 0]$.
**7.** 128.

**2 variantas**

**1.** a) $x \in \boldsymbol{R}$; b) $x \in (2{,}5; 3)$; c) $x \in (-\infty; 0] \cup (1; 5)$.
**2.** a) $-1$; b) $-8$; c) 1.
**3.** a) $m \in (2; +\infty)$; b) $a \in \left(-\infty; \frac{1}{13}\right]$; c) tokios $a$ reikšmės nėra.
**4.** a) $(3; 1)$, $(-3; -1)$; b) $(11; -2)$, $(1; 3)$; c) $(3; 2)$, $(-3; -2)$, $(2; -3)$, $(-2; 3)$.
**5.** a) 11; 12; 13; b) 3; 4; c) 2.
**6.** a) $x \in (-4; -3) \cup (3; 4)$; b) $-5$; c) $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; -2) \cup (-2; 0]$.
**7.** 17.

## K6. VEKTORIAI IR JŲ VEIKSMAI

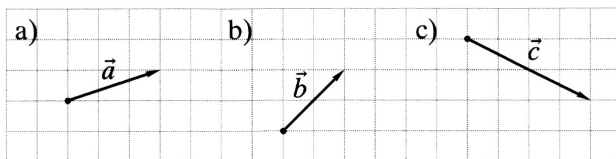
### 1 variantas

**1.** a) $\overrightarrow{LM}$ ir $\overrightarrow{ML}$, $\overrightarrow{MN}$ ir $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{NK}$ ir $\overrightarrow{KN}$, $\overrightarrow{KL}$ ir $\overrightarrow{LK}$, $\overrightarrow{LM}$ ir $\overrightarrow{KN}$, $\overrightarrow{LM}$ ir $\overrightarrow{NK}$, $\overrightarrow{ML}$ ir $\overrightarrow{KN}$, $\overrightarrow{ML}$ ir $\overrightarrow{NK}$, $\overrightarrow{LK}$ ir $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{LK}$ ir $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{KL}$ ir $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{KL}$ ir $\overrightarrow{NM}$;

b) $\overrightarrow{LK}$ ir $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{KL}$ ir $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{LM}$ ir $\overrightarrow{NK}$, $\overrightarrow{ML}$ ir $\overrightarrow{KN}$, $\overrightarrow{LM}$ ir $\overrightarrow{ML}$, $\overrightarrow{KL}$ ir $\overrightarrow{LK}$, $\overrightarrow{KN}$ ir $\overrightarrow{NK}$, $\overrightarrow{MN}$ ir $\overrightarrow{NM}$;

c) $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{KN}$, $\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{NK}$, $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$.

**2.**




**3.** a) $k = 2$; b) $k = \frac{1}{2}$; c) $k = -\frac{2}{3}$.

**4.** a) $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$;

b) $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \frac{3}{4}\vec{a}$, $\overrightarrow{MD} = \frac{1}{4}\vec{a} - \vec{b}$;

c) $\overrightarrow{CK} = \vec{a}$, $\overrightarrow{KD} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$.

**5.** a) $\overrightarrow{AB}$; b) $\vec{0}$; c) $\overrightarrow{AB}$.

**6.** a) $\sqrt{5}$; b) $\sqrt{2}$; c) 2.

**7.** a) 8; b) 4; c) $2\sqrt{3}$.

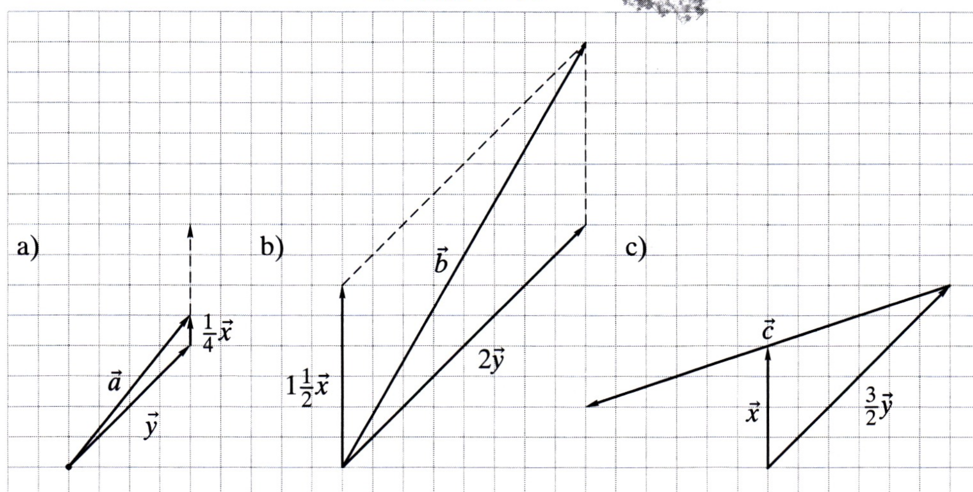
### 2 variantas

**1.** a) $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD}$ ir $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BA}$ ir $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA}$ ir $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$ ir $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AD}$ ir $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$ ir $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DA}$ ir $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DA}$ ir $\overrightarrow{BC}$;

b) $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BA}$ ir $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$ ir $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$ ir $\overrightarrow{CB}$;

c) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$.

**2.**




**3.** a) $k = -1$; b) $k = -3$; c) $-\frac{1}{3}$.

**4.** a) $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, $\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$;

b) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$;

c) $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{NP} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b}$.

**5.** a) $\overrightarrow{ND}$; b) $2\overrightarrow{ET}$; c) $\overrightarrow{AM}$.

**6.** a) $|\overrightarrow{EA}| = \sqrt{2}$; b) $|\overrightarrow{DB}| = \sqrt{5}$; c) $|\overrightarrow{EF}| = 2$.

**7.** a) 9; b) 6; c) 6.

## K7. VEKTORIAUS KOORDINATĖS. VEKTORIŲ SKALIARINĖ DAUGYBA

### 1 variantas

**1.** a) $\vec{a}(15; 6)$, $|\vec{a}| = 3\sqrt{29}$; b) $\vec{a}(-7; -6)$, $|\vec{a}| = \sqrt{85}$;
c) $\vec{a}\left(0; -3\frac{1}{7}\right)$, $|\vec{a}| = 3\frac{1}{7}$.

**2.** a) Nekolinearūs; b) kolinearūs; c) nekolinearūs.

**3.** a) $x = -3$; b) $x = -2$, $x = 0{,}4$; c) $x = 1\frac{3}{5}$.

**4.** a) $-7{,}4$; b) $-15$; c) $-0{,}13\sqrt{3}$.

**5.** a) $O(-1; 3)$; b) $AM = \sqrt{5}$.

**6.** a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $-\frac{3\sqrt{34}}{34}$; c) $\frac{1}{2}$.

### 2 variantas

**1.** a) $\vec{m}(-7; 9)$, $|\vec{m}| = \sqrt{130}$; b) $\vec{m}(8; -11)$, $|\vec{m}| = \sqrt{185}$;
c) $\vec{m}\left(0; -\frac{2}{7}\right)$, $|\vec{m}| = \frac{2}{7}$.

**2.** a) Kolinearūs; b) nekolinearūs; c) kolinearūs.

**3.** a) $y = 4$, b) $y = 8$, $y = -1$, c) $y = 2\frac{1}{3}$.

**4.** a) $-12{,}72$; b) 14; c) $-\sqrt{2}$.

**5.** a) $O(-4; 4)$; b) $CK = \sqrt{13}$.

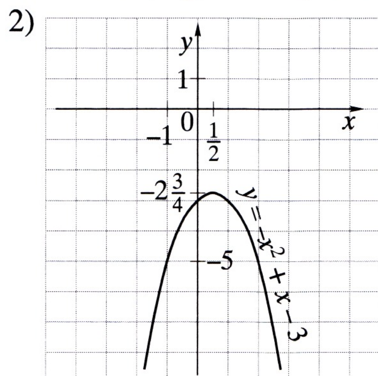
**6.** a) $-\frac{1}{2}$; b) $\frac{7\sqrt{2}}{10}$; c) $-\frac{1}{2}$.

## K8. FUNKCIJOS SĄVOKA

### 1 variantas

**1.** a) 1) $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -3\frac{3}{4}$, $f(\sqrt{3}) = -6 + \sqrt{3}$, $f\left(\frac{a+1}{a-1}\right) = \frac{-3a^2+4a-5}{(a-1)^2}$;

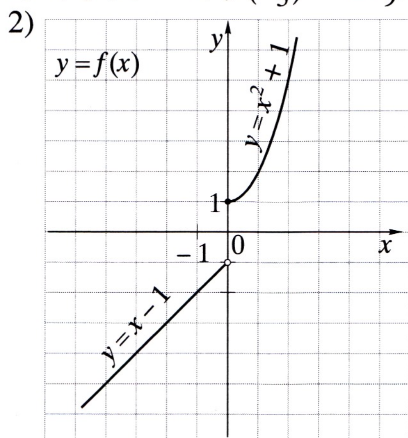
2)




3) $D$: $x \in (-\infty; +\infty)$, $E$: $y \in \left(-\infty; -2\frac{3}{4}\right]$. Didėjanti, kai $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$, mažėjanti, kai $x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

b) 1) $f(0) = 1$, $f\left(4\frac{2}{3}\right) = 22\frac{7}{9}$, $f\left(-8\frac{4}{5}\right) = -9\frac{4}{5}$;

2)




3) $D$: $x \in (-\infty; +\infty)$, $E$: $y \in (-\infty; -1) \cup [1; +\infty)$. Funkcija didėjanti.

**2.** a) $S(x) = x^2\left(1 - \frac{\pi}{8}\right)$; b) $m(x) = \left[\begin{array}{ll} 7{,}8x, & \text{kai } 0 < x \leqslant 10, \\ 8{,}9x - 11, & \text{kai } 10 < x \leqslant 25. \end{array}\right.$

**3.** a) $x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$; b) $x \in (1; 3]$; c) $x = -2$ ir $x = 2$.

**4.** a) $y = \frac{x-1}{2}$; $D$: $x \in (-\infty; +\infty)$, $E$: $y \in (-\infty; +\infty)$;

b) $y = x^2$, $D$: $x \in [0; +\infty)$, $E$: $y \in [0; +\infty)$;

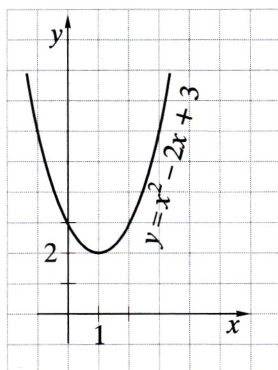
c) $y = 2 - \sqrt{x}$, $D$: $x \in [0; +\infty)$, $E$: $y \in (-\infty; 2]$.

**5.** a) $-5$; b) $3{,}8$; c) $1$.

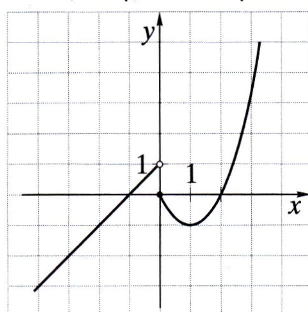
**6.** a) $k = -\frac{1}{2}$; b) $a = 2$, $b = -5$; c) $a = \frac{1}{3}$, $b = 3$, $c = -2$.
**7.** $16\pi$.

**2 variantas**

**1.** a) 1) $f(-0{,}2) = 3{,}44$, $f(\sqrt{2}) = 5 - 2\sqrt{2}$, $f\left(\frac{a}{a-1}\right) = \frac{2a^2-4a+3}{(a-1)^2}$;
2)




3) $D$: $x \in (-\infty; +\infty)$, $E$: $y \in [2; +\infty)$. Didėjanti, kai $x \in (1; +\infty)$, mažėjanti, kai $x \in (-\infty; 1)$.
b) 1) $g\left(-5\frac{3}{4}\right) = -4\frac{3}{4}$, $g(0) = 0$, $g\left(2\frac{3}{4}\right) = 2\frac{1}{16}$;
2)




3) $D$: $x \in (-\infty; +\infty)$, $E$: $y \in (-\infty; +\infty)$.
Didėjanti, kai $x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$, mažėjanti, kai $x \in [0; 1)$.

**2.** a) $S(x) = \frac{x^2(4\pi-3\sqrt{3})}{12}$; b) $s(t) = \left[\begin{array}{ll} \frac{1}{60} \cdot t, & t \in [0; 20], \\ \frac{1}{36} \cdot t - \frac{2}{9}, & t \in (20; 70]. \end{array}\right.$

**3.** a) Tokių reikšmių nėra; b) $x \in (-\infty; -5] \cup (1; +\infty)$; c) $x = -\frac{4}{3}$ ir $x = \frac{4}{3}$.

**4.** a) $y = \frac{7-x}{2}$, $D$: $(-\infty; +\infty)$, $E$: $y \in (-\infty; +\infty)$;
b) $y = \sqrt[3]{x}$, $D$: $x \in (-\infty; +\infty)$, $E$: $y \in (-\infty; +\infty)$;
c) $y = -\sqrt{x} - 1$, $D$: $x \in [0; +\infty)$, $E$: $y \in (-\infty; -1]$.

**5.** a) $-3$; b) $4{,}5$; c) $\frac{2}{3}$.

**6.** a) $b = 1$; b) $a = 3$, $b = 13$; c) $a = -3$, $b = -2$, $c = 10$.

**7.** $7{,}5\pi$.

## K9. LAIPSNINĖ FUNKCIJA

### 1 variantas

**1.** a) $x^{\frac{23}{24}}$; b) 2; c) $m-2$.

**2.** a) $f(10)-f(4)>0$; b) $g(-3)-g(2)>0$; c) $f(-2)\cdot g(-2)<0$.

**3.** a) $-5{,}8$; b) $-17$; c) $\frac{7}{10}$.

**4.** a) $x=1$; b) $x=8$; c) $x=\frac{1}{4}$.

**5.** a) $-\frac{1}{3}$; b) $-8$.

**6.** a) Nėra nei lyginė, nei nelyginė; b) lyginė; c) nėra nei lyginė, nei nelyginė.

**7.** 6 cm.

### 2 variantas

**1.** a) $x^{\frac{7}{12}}$; b) 3; c) $x$.

**2.** a) $g(-2)\cdot g(30)>0$; b) $f(6)+f(-4)>0$; c) $f(-5)+g(-5)<0$.

**3.** a) 5,2; b) $-10$; c) $\frac{3}{10}$.

**4.** a) $x=1$; b) $x=125$; c) $x=128$.

**5.** a) 3; b) $8\frac{1}{3}$.

**6.** a) Nelyginė; b) nėra nei lyginė, nei nelyginė; c) nėra nei lyginė, nei nelyginė.

**7.** 24 cm.

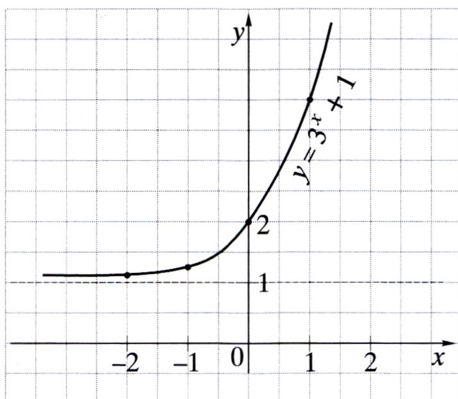
## K10. RODIKLINĖ FUNKCIJA

### 1 variantas

**1.** a) Didėjanti; b) mažėjanti; c) mažėjanti.

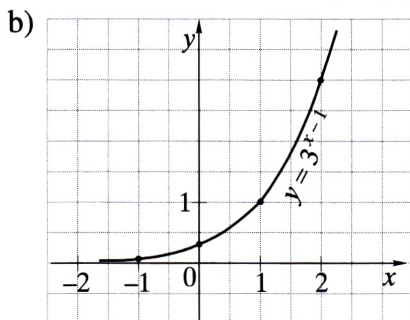
**2.**

a)



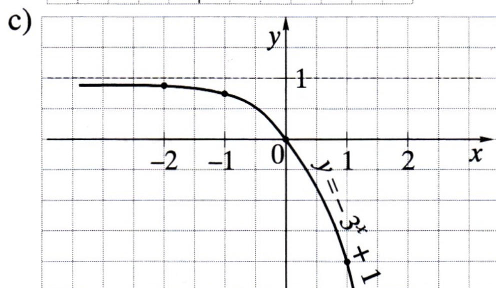

$D$: $x\in(-\infty;+\infty)$, $E$: $y\in(1;+\infty)$.
Funkcija didėjanti.

b)




$D$: $x \in (-\infty; +\infty)$, $E$: $y \in (0; +\infty)$.
Funkcija didėjanti.

c)




$D$: $x \in (-\infty; +\infty)$, $E$: $y \in (-\infty; 1)$.
Funkcija mažėjanti.

**3.** a) $x = 0$; b) $x = 9$; c) $x = -1$ ir $x = 1$.

**4.** a) (5; 0); b) (4; 0); c) (12; 0), (4; 0).

**5.** a) $x \in [1; 2]$; b) $x \in (-\infty; 1) \cup [2; 6]$; c) $x \in [1; +\infty)$.

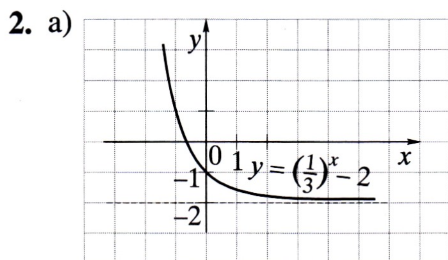
**6.** a) $x \in (2; +\infty)$; b) $x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$; c) $x \in (-\infty; 0) \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

**7.** 10 cm, 18 cm.

## 2 variantas

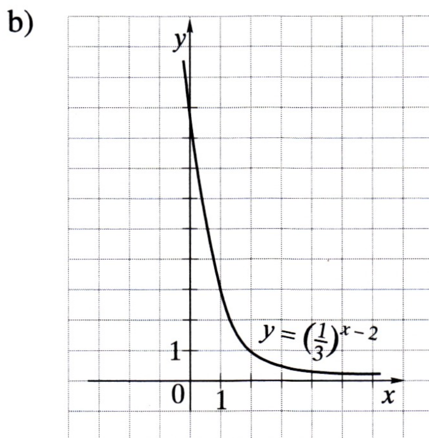
**1.** a) Didėjanti; b) mažėjanti; c) mažėjanti.

**2.** a)



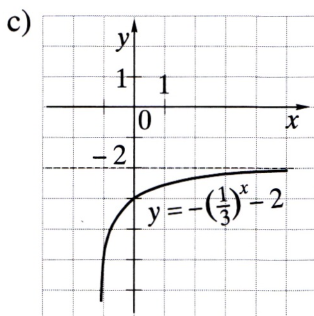

$D$: $x \in (-\infty; +\infty)$,
$E$: $y \in (-2; +\infty)$.
Funkcija mažėjanti.

b)




$D$: $x \in (-\infty; +\infty)$,
$E$: $y \in (0; +\infty)$.
Funkcija mažėjanti.

c)




$D$: $x \in (-\infty; +\infty)$, $E$: $y \in (-\infty; -2)$. Funkcija didėjanti.

**3.** a) $x = -0{,}5$; b) $x = 16$; c) $x = 0$.

**4.** a) (1; 0); b) (2; 0); c) (−1; 0), (2; 0).

**5.** a) $x \in (-\infty; 1] \cup [7; +\infty)$; b) $x \in (1; 2] \cup [3; +\infty)$; c) $x \in (-\infty; 1]$.

**6.** a) $x \in (1; 2)$; b) $x \in (-1; 3)$; c) $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

**7.** 3,35 cm; 2,65 cm.

## K11. LOGARITMINĖ FUNKCIJA

### 1 variantas

**1.** a) 3; b) 4; c) $\frac{1}{2}$.

**2.** a) $x \in (-\infty; 5)$; b) $x \in (-5; 3)$; c) $x \in [4; 6) \cup (6; 7)$.

**3.** a) $x = 1$; b) $x = 6$; c) $h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$, $D_f = E_h = (-2; +\infty)$, $E_f = D_h \in \boldsymbol{R}$.

**4.** a) $\log_2 5 > \log_{0,5} 3$; b) $\log_3 4 + \log_3 8 > \log_3(4+8)$; c) $\frac{\lg 15 - \lg 3}{2} < \frac{1}{2}\lg 25$.

**5.** a) 5; b) sprendinių nėra; c) $\frac{1}{100}$ ir 100; d) 2 ir 4; e) 5.

**6.** a) (0; 4); b) 8.

**7.** a) 12; b) 2, 3, 4, 5, 6; c) 0; d) $x \in (1; 6)$; e) $(3; 4) \cup (5; +\infty)$.

### 2 variantas

**1.** a) −1; b) 2; c) 34.

**2.** a) $x \in (-\infty; 9)$; b) $x \in (-1; 4)$; c) $x \in (-\infty; 0)$; (0; 1).

**3.** a) $x = 1$, $x = 2$; b) $x = 100$;
c) $h(x) = \log_3(x-2)$, $D_f = E_h \in \boldsymbol{R}$, $E_f = D_h = (2; +\infty)$.

**4.** a) $\log_{0,3} 5 < \log_3 6$; b) $\log_5 3 + \log_5 7 > \log_5(3+7)$; c) $\frac{1}{3}\lg 27 > \frac{\lg 14 + \lg 2}{2}$.

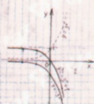
**5.** a) 4; b) sprendinių nėra; c) $\frac{1}{5}$ ir 125; d) $10^{-4,5}$ ir 10; e) 3.

**6.** a) (1; 2); b) 1.

**7.** a) 4; b) 2; 3; 4; c) 1; d) [2; 4]; e) (2; 4).

Leidinys atitinka ŠMM patvirtintus standartus ir programas.
Leidinys atitinka matematikos vadovėlį.
Visi uždaviniai patikrinti ir perspręsti leidyklos specialistų.

Eglė Danielienė, Aldona Janulevičienė, Daiva Noreikienė
Matematikos kontroliniai darbai su sprendimais
11 klasė 1 dalis



Eglė Danielienė, Aldona Janulevičienė, Daiva Noreikienė
Matematikos kontroliniai darbai su sprendimais
11 klasė 2 dalis

Eglė Danielienė, Aldona Janulevičienė, Daiva Noreikienė
Matematikos kontroliniai darbai su sprendimais
12 klasė 1 dalis

Eglė Danielienė, Aldona Janulevičienė, Daiva Noreikienė
Matematikos kontroliniai darbai su sprendimais
12 klasė 2 dalis

ISBN 9955-680-17-2